Exercices : limites, continuité...

Limites, développements limités

Exercice 1 :

1. Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3x^2+1}-2}$.
2. Calculer, si elle existe, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ où $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 1\\ x^{\ln(\ln(x))} & \text{si } x>1\end{cases}$.

   Indication : on pourra effectuer un changement de variable judicieux.
3. Déterminer les limites éventuelles en $+\infty$ des fonctions

$$f_1: x\mapsto \frac{\ln(x)-x^2+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+x^4-2\ln(x)} \text{ et } f_2: x\mapsto \frac{x^2+\mathrm{e}^{4x}-(\ln(x))^4}{\mathrm{e}^{-2x}+x^2-\mathrm{e}^{3x}}.$$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x\times\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$, où $\lfloor.\rfloor$ désigne la partie entière.

1. a) Simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x>1$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
   b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a) Montrer que pour tout $x\in]0;1[$, $1-x<f(x)\leqslant 1$.
   b) En déduire que f admet une limite finie à droite en 0 et déterminer la valeur de cette limite.
   c) Déterminer la limite de f à gauche en 0.

Exercice 3 :

À l'aide des équivalents classiques et/ou des développements limités calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x\tan(x)}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\mathrm{e}^x)\sin(x)}{x^2+x^3}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\ln(1+x^2)-x\sin(x)}$.
4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin(x))^{\frac{1}{2x-\pi}}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x\times\ln\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\mathrm{e}^{x-3}-\sqrt{x-2}}{x^3-3^x}$.

Exercice 4 :

1. Démontrer que la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x)=x\exp\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ admet en $+\infty$ et $-\infty$ des asymptotes dont on donnera une équation cartésienne.
2. La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\arctan(x)+\mathrm{e}^x$ admet-elle des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$. Si oui, en déterminer une équation cartésienne.

Exercice 5 :

On considère la fonction $f(x)=(3x^2+2x)\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

1. Déterminer des réels a, b et c tels que, pour $x>0$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

   On pourra poser $h=\dfrac{1}{x}$ et utiliser des développements limités en 0.
2. Prouver que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$; on précisera l'équation réduite de cette asymptote ainsi que sa position par rapport à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Continuité, dérivabilité

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[\setminus\{2\}$ par : $f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 2.

On note $\tilde{f}$ le prolongement de f à $]1;+\infty[$.

2. La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable sur $]1;+\infty[$? de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$?

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{1-x^2} & \text{si } x\in[-1;1]\\ 2x^2-4x+3 & \text{si } x>1.\end{cases}$$

1. a) Écrire un programme Python qui, lorsqu'on l'exécute, affiche la courbe représentative de la fonction f sur le segment $[-1;2]$.
   b) Quelles conjectures pouvez-vous émettre quant à la continuité et la dérivabilité de f sur son domaine de définition ?
2. Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Démontrer que f est dérivable à droite en 1 mais pas à gauche.