Exercices : Intégrales, rappels et généralisations

Intégrales sur un segment

Exercice 1 : Faire ses gammes

À l'aide du tableau des primitives usuelles (pas d'IPP, pas de changement de variable,...) calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t(\ln(t))^3}\,\mathrm{d}t.$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} |6x^2-x-1|\,\mathrm{d}x.$

Exercice 2 :

On cherche à calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

1. À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que :

$$I = \mathrm{e}^{\pi/4} + 2 - 4I.$$

2. En déduire la valeur de I.

Exercice 3 :

À l'aide des changements de variable indiqués, calculer les intégrales données.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$, en posant $t = x+\sqrt{x^2+1}$.
2. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{x(1+x)}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x$, en posant $u = \dfrac{x}{x+1}$.

Exercice 4 :

1. Déterminer 4 réels a, b, c et d tels que $a<b<c<d$ et

$$X^4 - 3X^2 + 2 = (X-a)(X-b)(X-c)(X-d).$$

2. Montrer que pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\frac{1}{x^4-3x^2+2} = -\frac{\sqrt{2}/4}{x-a} + \frac{1/2}{x-b} - \frac{1/2}{x-c} + \frac{\sqrt{2}/4}{x-d}.$$

3. À l'aide du changement de variable $x=\sin(t)$, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3(t)+\cos(t)}$.

Exercice 5 :

On cherche à calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n+k)(\ln(2n+k)-\ln(n))}$.

1. Mettre la somme sous la forme $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, en choisissant bien la fonction f.
2. Appliquer alors le théorème de la moyenne avec la fonction f déterminée ci-dessus pour calculer la limite demandée.

Exercice 6 :

1. À l'aide du théorème de la moyenne (ou théorème des sommes de Riemann), écrire l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ comme une limite d'une suite.
2. En déduire un script Python qui calcule et affiche une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

Intégrales généralisées

Exercice 7 : Faire ses gammes

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et en cas de convergence donner leur valeur :

1. $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-3t}}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3t^3}{(3+t^4)^3}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-3x}}\mathrm{e}^{-\sqrt{1-3x}}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{4^t}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x)\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x.$
   Indication : forme canonique
9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t+t}\,\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$
    Indication : $t=\sin^2(u)$.

Exercice 8 :

1. On souhaite déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$.
   a) Où se trouve(nt) le(s) problème(s) de convergence ?
   b) Justifier que $\displaystyle\frac{1}{t^2-t} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{t-1}$.
   c) Par la « méthode par calcul » déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t$.
   d) Conclure quant à la nature de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$.
2. En s'inspirant de la méthode de la question 1., déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\ln x}{x+4}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9 :

On considère la fonction f définie sur $]0;1]$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2+1}$.

1. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire alors la nature de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10 :

À l'aide du critère des équivalents, déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-5}{x^4+4x+4}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$

Exercice 11 :

Dans cet exercice on souhaite déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

1. Où se trouve(nt) le(s) problème(s) de convergence ?
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.
3. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.
4. Déduire des questions précédentes la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 12 :

1. a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   b) En déduire que, pour tout réel a, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
2. Démontrer que pour tout réel a, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   On distinguera les cas $a \geqslant 0$ et $a < 0$.
3. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
4. a) Grâce au changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, montrer que
   $$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)(1+x^a)}\,\mathrm{d}x.$$
   b) En déduire que $I(a) = \dfrac{\pi}{4}$. *(Indication : calculer $I(a)+I(a)$)*

Exercice 13 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}^+$, décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$: $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant xf(x) \leqslant 2\int_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. *Indication :* $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt = \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^{2x} f(t)\,dt$.
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

Pour aller plus loin

Exercice 14 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exercice 15 :

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ on considère l'intégrale $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

1. a) Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}$.

   b) Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

   c) En déduire la nature de l'intégrale $\Gamma(x)$.
   (On distinguera le cas $x \geqslant 1$ et le cas $0 < x < 1$.)
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 :

Supposons que I est un intervalle borné et que f est une fonction continue et bornée sur I.

Montrer $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Exercice 17 :

Soit f une fonction continue sur $[0;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Montrer que si f admet une limite finie non nulle en $+\infty$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente.