

Exercice

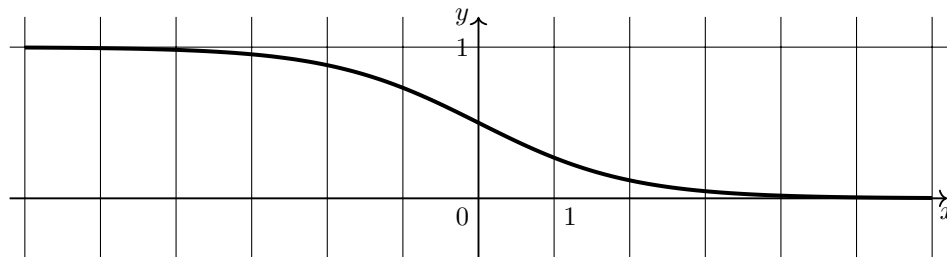
1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^x} &= \frac{e^{-x}}{e^{-x}(1+e^x)} \\ &= \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$

- b) La fonction $x \mapsto 1+e^x$ est strictement croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc par opérations sur les fonctions monotones, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Les limites en $-\infty$ et $+\infty$, ne sont pas des formes indéterminées

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	1	$\frac{1}{2}$	0



- c) Comme pour tout x réel $1+e^x$ est non nul, l'équation différentielle homogène associée à (E) peut s'écrire

$$y'(x) - \frac{1}{1+e^x}y(x) = 0. \quad (H)$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ on sait que l'ensemble des solutions de cette équation homogène est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ où A est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ et λ un réel quelconque.

En utilisant le calcul de la question 1.a) on constate qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -\frac{1}{1+e^x}$ est $x \mapsto \ln(1+e^{-x}) = \ln(1+e^{-x})$.

Nous savons donc que les solutions de (H) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \exp(-\ln(1+e^{-x})), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (H) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \lambda \left(\frac{1}{1+e^{-x}} \right)$ où λ est un réel quelconque.

2. a) La méthode de la variation de la constante nous indique de chercher une solution particulière de l'équation (E) sous la forme $y_p : x \mapsto \frac{u(x)}{1+e^x} = \frac{u(x)e^x}{1+e^x}$ où u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_p'(x) = \frac{u'(x)}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}u(x)}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^x u'(x)}{1+e^x} + \frac{e^x u(x)}{(1+e^x)^2}.$

Donc y_p est solution de (E) si, et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + e^x) \left(\frac{e^x u'(x)}{1 + e^x} + \frac{e^x u(x)}{(1 + e^x)^2} \right) - \frac{u(x)e^x}{1 + e^x} + \left(\frac{e^x}{1 + e^x} \right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x u'(x) + \frac{e^x u(x)}{1 + e^x} - \frac{u(x)e^x}{1 + e^x} + \left(\frac{e^x}{1 + e^x} \right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) &= -\frac{e^x}{(1 + e^x)^2} \end{aligned}$$

On choisit alors de prendre $u(x) = \frac{1}{1 + e^x}$.

Une solution particulière de (E) est donc $x \mapsto \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$.

D'après le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équations différentielle linéaire d'ordre 1, y est solution de (E) si, et seulement si, y est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation complète, c'est-à-dire

$y \text{ est solution de } (E) \text{ si et seulement s'il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \left(\lambda + \frac{1}{1 + e^x} \right).$

b) On peut commencer par remarquer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1$. Donc $\frac{e^x}{1 + e^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^x} + \lambda = \lambda$. Donc pour $\lambda \neq 0$, $\lambda + \frac{1}{1 + e^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda$.

Ainsi, par produit d'équivalents, $\text{pour } \lambda \neq 0, y(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda.$

Pour $\lambda = 0$, $y(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \times \frac{1}{e^x + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{e^x + 1}$.

De plus $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x} \times \frac{1}{1 + e^{-x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{e^x}$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1$.

En conclusion, $\text{pour } \lambda = 0, y(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$

Problème

Résultats préliminaires

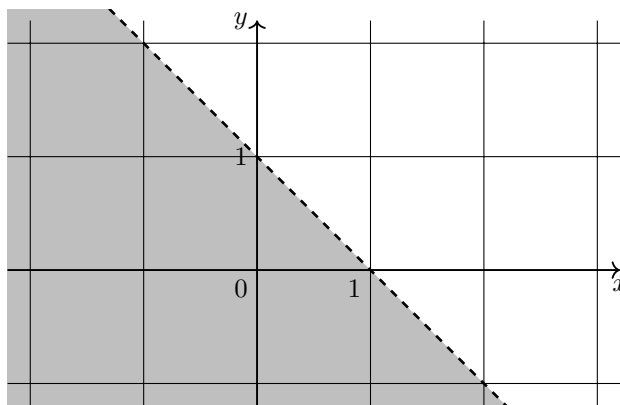
1. On dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le pavé ouvert U lorsque f admet en tout point de U des dérivées partielles par rapport à ses deux variables et que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U .
2. Si une fonction de deux variables f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un pavé ouvert U et qu'elle admet un extremum en un point de U , alors ce point est un point critique de f .
3. a) Soit M un point de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$. On a $\|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
b) Par définition de D , on a :

$$\begin{aligned} M \in D &\Leftrightarrow \|\vec{OM}\| < 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1 \quad (\text{la fonction } t \mapsto t^2 \text{ étant strictement croissante sur } \mathbb{R}_+) \\ &\Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 > 0. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{M \in D \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 > 0}.$$

Extrema d'une fonction de deux variables

4. a) Méthode : on trace la droite d'équation $1 - x - y = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x$ en pointillé et on hachure ou colorie la partie du plan située « sous » la droite.



- b) Soit $(u, v) \in A$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \sqrt{1 - u - v} + (u - v) \times \frac{-1}{2\sqrt{1 - u - v}} \\ &= \frac{2(1 - u - v) - (u - v)}{2\sqrt{1 - u - v}} \\ &= \boxed{\frac{2 - 3u - v}{2\sqrt{1 - u - v}}} \end{aligned}$$

5. a) La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$. La fonction f est donc définie pour les (x, y) tels que $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ ce qui correspond aux points $M(x, y) \in \overline{D}$.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est } \mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \overline{D}.}$$

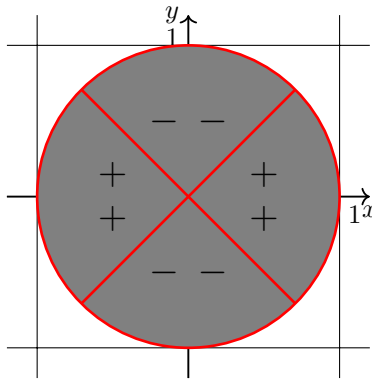
- b) Soit $(x, y) \in \mathcal{D}_f$.

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \text{ ou } \sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y \text{ ou } x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

L'ensemble des points où f est nulle est donc la réunion de la portion de la droite d'équation $y = x$ incluse dans le disque fermé $\overline{D}$, de la portion de la droite d'équation $y = -x$ incluse dans le disque fermé $\overline{D}$ et du cercle de centre O et de rayon 1 (cf dessin).

- c) Sur $\mathcal{D}_f$, on a $\sqrt{1 - x^2 - y^2} \geq 0$ donc $f(x, y)$ a le même signe que $x^2 - y^2$. Or $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, donc

$$\boxed{f(x, y) > 0 \Leftrightarrow ((x > y \text{ et } x > -y) \text{ ou } (x < y \text{ et } x < -y))} \quad (\text{cf dessin})$$



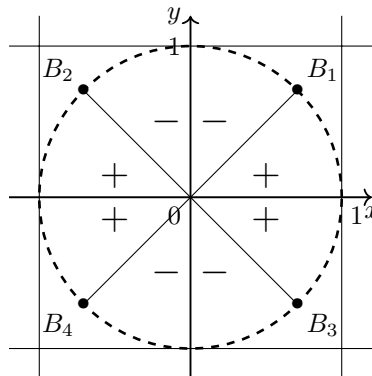
6. a) Pour tout $(x, y) \in D$, $\boxed{f(x, y) = g(x^2, y^2)}$.
- b) Soit $(x, y) \in D$, $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \frac{\partial g}{\partial u}(x^2, y^2)}$.
- c) On en déduit que, pour $(x, y) \in D$, $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x(2 - 3x^2 - y^2)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}}$.
7. a) Soit $(x, y) \in D$, comme $f(x, y) = -g(y^2, x^2)$, on a $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y \frac{\partial g}{\partial u}(y^2, x^2)}$.
- b) Ainsi $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-y(2 - 3y^2 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}}$.
8. a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + 3y^2 = 2 \end{cases} &\iff \begin{cases} -8y^2 = -4 \\ x^2 + 3y^2 = 2 \end{cases} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\ &\iff \begin{cases} y^2 = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Le système admet donc quatre solutions :

$$E_1 = \left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}_{B_1}, \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}_{B_2}, \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)}_{B_3}, \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)}_{B_4} \right\}.$$

- b) Sur le dessin, les points se placent de la manière suivante :



Pour les 4 points ci-dessus on remarque que $x^2 + y^2 = 1$. On a donc $\|\overrightarrow{OB_i}\| = 1$ et donc $B_i \notin D$.

9. Soit $(x, y) \in D$. (x, y) est un point critique de f ssi $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Or

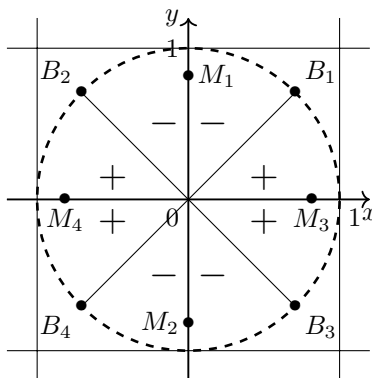
$$\begin{aligned}
\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \frac{x(2-3x^2-y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0 \\ \frac{-y(2-3y^2-x^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x(2-3x^2-y^2) = 0 \\ -y(2-3y^2-x^2) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } (2-3x^2-y^2) = 0 \\ y = 0 \text{ ou } (2-3y^2-x^2) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ 2-3y^2-x^2 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2-3x^2-y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2-3x^2-y^2 = 0 \\ 2-3y^2-x^2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3x^2+y^2 = 2 \\ x^2+3y^2 = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le dernier système est le système (S) étudié à la question 8. et nous avons vu que ses solutions n'appartiennent pas à D .

Les points critiques de f sur D sont donc les cinq couples

$$\boxed{\underbrace{(0,0)}_{M_0}, \underbrace{\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}_{M_1}, \underbrace{\left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}_{M_2}, \underbrace{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)}_{M_3}, \underbrace{\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)}_{M_4}}$$

10.



11. On a $f(0,0) = 0$. Or on peut remarquer (on peut s'aider du dessin) que, pour tout $x \in [-1; 1] \setminus \{0\}$, $f(x,0) > 0 = f(0,0)$ et pour tout $y \in [-1; 1] \setminus \{0\}$, $f(0,y) < 0 = f(0,0)$.

La fonction f ne peut donc admettre en $(0,0)$ ni un maximum local, ni un minimum local.

12. La fonction h est dérivable sur $[0, 1[$. Soit $t \in [0, 1[$,

$$h'(t) = \sqrt{1-t} - \frac{t}{2\sqrt{1-t}} = \frac{2-3t}{2\sqrt{1-t}}$$

D'où le tableau de variation suivant :

t	0	$\frac{2}{3}$	1
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	0	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	0

13. a) On reprend la définition de D :

$$(x, y) \in D \iff x^2 + y^2 < 1 \iff \rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta) < 1 \iff \rho^2 < 1.$$

Comme ρ est supposé positif ou nul, on a bien $(x, y) \in D \iff (\rho, \theta) \in [0; 1[\times [0; 2\pi[$.

b) Soit $(x, y) \in D$, on a

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \\
 &= [(\rho \cos(\theta))^2 - (\rho \sin(\theta))^2] \sqrt{1 - [(\rho \cos(\theta))^2 + (\rho \sin(\theta))^2]} \\
 &= \rho^2 [\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2] \sqrt{1 - \rho^2} && (\text{car } (\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1) \\
 &= h(\rho^2) \cos(2\theta) && (\text{car } (\cos(\theta))^2 - (\sin(\theta))^2 = \cos(2\theta))
 \end{aligned}$$

On a bien, $\text{pour tout } (x, y) \in D, f(x, y) = h(\rho^2) \cos(2\theta).$

c) D'après la question 12., sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction h est à valeurs positives et admet un maximum $h\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} > 0$ en $\frac{2}{3}$. Donc pour tout point (x, y) de D , on a :

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}} \leq f(x, y) = h(\rho^2) \cos(2\theta) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

puisque $\rho^2 \in [0; 1[$ et $-1 \leq \cos(2\theta) \leq 1$.

De plus $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right) = h\left(\frac{2}{3}\right) \cos(0) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, on a donc $f(x, y) \leq f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$ pour tout $(x, y) \in D$, ce qui signifie

que la fonction f admet un maximum global en $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$ qui vaut $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

14. En utilisant que pour $(x, y) \in D$ $f(-x, y) = f(x, y)$, et ce que l'on a fait à la question précédente on en déduit f atteint aussi son maximum en $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$.

En utilisant que pour $(x, y) \in D$ $f(y, x) = -f(x, y)$, et ce qui précède, on en déduit que f admet un minimum global qu'elle atteint en $\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ et en $\left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Ce minimum vaut $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

15. Sur le cercle de centre O et de rayon 1 on a $f(x, y) = 0$ donc sur ce cercle f n'admet pas d'extremum global. Regardons s'il ne s'agit toutefois pas d'extremum locaux. On peut s'aider du dessin de la question 5.c).

Aux points B_1 , B_2 , B_3 et B_4 on peut voir que f n'admet pas d'extremum local car aussi près que l'on veut de ces points on peut trouver des points où f est strictement positive et où f est strictement négative (cf dessin).

Pour les autres points du cercle, la fonction f est nulle en ce point et en regardant le signe de f au voisinage de ce point on voit que f est de signe constant. Ainsi, f admet sur le cercle de centre O et de rayon 1 un extremum local en tous les points autres que les points B_i .