Vocabulaire sur les fonctions

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

- **« R barre »** : On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.
- **Propriété vraie au voisinage d'un point** :
  Soit $a \in \mathbb{R}$, on dit qu'une propriété portant sur f est vraie au voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la propriété est vraie sur $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\cap I$.
  On dit qu'une propriété portant sur f est vraie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété est vraie sur $[A; +\infty[\cap I$ (resp. $]-\infty; A] \cap I$).
- **Fonction paire** : On dit que f est une fonction paire sur I si, et seulement si :
  - $\forall x \in I, -x \in I$ *(on dit que I est symétrique par rapport à 0)*;
  - $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$.
- **Fonction impaire** : On dit que f est une fonction impaire sur I si, et seulement si :
  - $\forall x \in I, -x \in I$ *(on dit que I est symétrique par rapport à 0)*;
  - $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$.
- **Fonction périodique** : On dit que f est une fonction périodique de période T si, et seulement si :
  - f est définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ qui vérifie que pour tout $x \in D$, $x + T \in D$;
  - pour tout $x \in D$, $f(x+T) = f(x)$.
- **Fonction (strictement) croissante** :
  On dit que f est croissante (resp. strictement croissante) sur l'<u>intervalle I</u> si, et seulement si :
  $$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (\text{resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ ).$$
- **Fonction (strictement) décroissante** :
  On dit que f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur l'<u>intervalle I</u> si, et seulement si :
  $$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2) \quad (\text{resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\ ).$$
- **Sens de variation** : il s'agit de préciser les intervalles où f est croissante et ceux où f est décroissante.
- **Fonction majorée ou minorée** : On dit que f est **majorée** par M (resp. **minorée** par m) sur I si, et seulement si,
  $$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant M \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant m\ ).$$
- **Fonction bornée** : se dit d'une fonction f qui est majorée et minorée sur I.
- **Maximum ou minimum global** : On dit que f admet un **maximum global** (resp. **minimum global**) sur I s'il existe $x_0 \in I$ tel que :
  $$\forall x \in I, \qquad f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$
  On dit alors que le maximum de f (resp. minimum) est $f(x_0)$ et qu'il est atteint en x_0.
- **Extremum global** : On dit que f admet un **extremum global** si f admet un maximum <u>ou</u> un minimum global.
- **Maximum ou minimum local** : On dit que f admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) s'il existe $x_0 \in I$ et J un intervalle contenu dans I et contenant x_0, tels que :
  $$\forall x \in J, \qquad f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$
- **Extremum local** : On dit que f admet un **extremum local** si f admet un maximum <u>ou</u> un minimum local.

— **Fonction injective sur I** : on dit que f est injective sur I si, et seulement si,

$$\forall (x,y) \in I^2 \qquad f(x) = f(y) \Longleftrightarrow x = y.$$

— **Fonction surjective de I sur J** : on dit que f est surjective de I sur J si, et seulement si,

pour tout $y \in J$ il existe au moins un $x \in I$ tel que $y = f(x)$.

— **Fonction bijective de I sur J** : se dit d'une fonction injective sur I et surjective de I sur J.

— **Fonctions équivalentes** : on dit que f et g sont équivalentes au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si, et seulement si, g n'est pas nulle au voisinage de a et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

— **Fonction continue en $a \in I$** : on dit que f est continue en a si, et seulement si, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

— **Fonction dérivable en $a \in I$** : lon dit que f est dérivable en a si, et seulement si, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$.

— **Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I** : lorsque f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.

— **Fonction de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$) sur I** : lorsque f est k fois dérivable sur I et que sa dérivée $k^{\text{ème}}$ $f^{(k)}$ est continue sur I.

— **Prolongement par continuité** : Si f est une fonction non définie en x_0 et mais possédant une limite finie ℓ en x_0 alors on peut définir la fonction g par $g(x) = f(x)$ si $x \in \mathscr{D}_f$ et $g(x_0) = \ell$ et cette fonction est continue sur $\mathscr{D}_f \cup \{x_0\}$.
La fonction g est appelée le **prolongement par continuité** de f à $\mathscr{D}_f \cup \{x_0\}$.

— **Notation $o(x^n)$** : On dit qu'une fonction f est **négligeable devant** x^n **au voisinage de** 0, on note $f = o(x^n)$, si f est définie au voisinage de 0 et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0$.

— **Développement limité au voisinage de 0** : déterminer le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0 c'est trouver des réels a_0, …, a_n tels que, pour tout x au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n).$$

— **Développement limité au voisinage de x_0** (*à la limite du programme)* : déterminer le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de x_0 c'est trouver des réels a_0, …, a_n tels que, pour tout x au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Limites usuelles

$x \to$ / $f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(x)$		$-\infty$ (en 0^+)	$+\infty$
e^x	0	1	$+\infty$
x^r, $r > 0$	r entier pair : $+\infty$ r entier impair : $-\infty$	0	$+\infty$

Opérations sur les limites

$\lim\limits_b u$	$\lim\limits_b v$	$\lim\limits_b (u+v)$	$\lim\limits_b (uv)$	$\lim\limits_b \left(\dfrac{u}{v}\right)$
$\ell \neq 0$	0	ℓ	0	$\pm\infty$ (RS)
0	0	0	0	?
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (RS)	0
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	0
$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (RS)	$\pm\infty$ (RS)
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	?	$\pm\infty$ (RS)
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	?
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

RS signifie qu'il faut déterminer le signe du résultat grâce à la règle des signes de la multiplication.

Les cases où il y a un ? sont les cases où on ne peut pas donner de résultat général. On appelle ce genre de limite des **formes indéterminées**. C'est au cas par cas qu'il faut trouver la bonne méthode pour arriver à calculer la limite.

Composée de fonctions : Soient b, b', b'' trois éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions telles que f est définie au voisinage de b et g est définie au voisinage de b'. Alors :

$$\lim_{x \to b} f(x) = b' \ ; \ \lim_{x \to b'} g(x) = b'' \Rightarrow \lim_{x \to b} g \circ f(x) = b''$$

Les croissances comparées

Lorsqu'on fait appel aux résultats suivants on dit souvent que l'on utilise les « croissances comparées ».

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in(\mathbb{R}^{+*})^3,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\beta x^\gamma}}{x^\alpha}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha}=0,\qquad \lim_{x\to0}x^\alpha(\ln(x))^\beta=0,\qquad \lim_{x\to-\infty}x^\alpha\mathrm{e}^{\beta x}=0.$$

Équivalents à connaitre par cœur

— On pourra, en exercice, remplacer les « boites »($\square$) par n'importe quelle expression du moment que la boite vérifie ce qui est indiqué :

$$\begin{array}{rlcl}
 & \mathrm{e}^x-1\underset{x\to0}{\sim}x & \Longrightarrow & \text{si }\square\to0,\ \mathrm{e}^\square-1\underset{\dots}{\sim}\square\\[2ex]
 & \ln(1+x)\underset{x\to0}{\sim}x & \Longrightarrow & \text{si }\square\to0,\ \ln(1+\square)\underset{\dots}{\sim}\square\\[2ex]
 & \ln(x)\underset{x\to1}{\sim}x-1 & \Longrightarrow & \text{si }\square\to1,\ \ln(\square)\underset{\dots}{\sim}\square-1\\[2ex]
\text{pour }\alpha\neq0, & (1+x)^\alpha-1\underset{x\to0}{\sim}\alpha x & \Longrightarrow & \text{si }\square\to0,\ (1+\square)^\alpha-1\underset{\dots}{\sim}\alpha\square\\[2ex]
 & \sin(x)\underset{x\to0}{\sim}x & \Longrightarrow & \text{si }\square\to0,\ \sin(\square)\underset{\dots}{\sim}\square\\[2ex]
 & \cos(x)-1\underset{x\to0}{\sim}-\dfrac{x^2}{2} & \Longrightarrow & \text{si }\square\to0,\ \cos(\square)-1\underset{\dots}{\sim}-\dfrac{\square^2}{2}\\[2ex]
 & \tan(x)\underset{x\to0}{\sim}x & \Longrightarrow & \text{si }\square\to0,\ \tan(\square)\underset{\dots}{\sim}\square
\end{array}$$

On en déduit, entre autre, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$

— Si n et p sont deux entiers tels que $n\geqslant p$ et si $(a_p,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n-p+1}$ avec $a_n\neq0$ et $a_p\neq0$:

$$a_px^p+\ldots+a_nx^n\underset{x\to0}{\sim}a_px^p,\qquad\qquad a_px^p+\ldots+a_nx^n\underset{x\to\pm\infty}{\sim}a_nx^n.$$

« Tout polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré en $+\infty$ et $-\infty$ et à son monôme de plus petit degré en 0. »

Développements limités

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\\
&\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)\\
&\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)\\
&(1+x)^a \underset{x\to 0}{=} 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\\
&\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)\\
&\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)\\
&\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n})\\
&\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})
\end{aligned}
$$

Propriétés importantes

— **Si** $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a et **si** f et g admettent des limites finies en a **alors**

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x).$$

— **Si** $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a et **si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ **alors** $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

— **Si** $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a et **si** $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

— **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\ell > 0$ **alors** il existe un voisinage de a tel pour tout x appartenant à ce voisinage, $f(x) > 0$. (à adapter si $\ell < 0$)

— **Si** $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

— **Si** f admet une limite finie $\ell \neq 0$ en a **alors** $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.

— **Si** f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ **alors** $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$.

— **Si** f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, **alors** au voisinage de x_0, f est équivalente au premier terme non nul de son développement limité.

— **Si** f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0, $f(x) = a + b(x-x_0) + o((x-x_0))$ **alors** f est dérivable en x_0 et $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.

— **Si** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ **alors** $g(x) + f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

— **Opérations sur les** $\sim$: il est INTERDIT DE SOMMER des équivalents.

(i) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$

(ii) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} j$ alors $fh \underset{a}{\sim} gj$

(iii) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a alors $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$

(iv) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} j$ et si h et j ne s'annulent pas au voisinage de a alors $\dfrac{f}{h} \underset{a}{\sim} \dfrac{g}{j}$

(v) Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f^n \underset{a}{\sim} g^n$

— **Si** f est dérivable en a, **alors** f est continue en a.

Théorèmes importants

— **Théorème des bornes atteintes** : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.
Alors f est bornée sur $[a; b]$ et atteint ses bornes.
— **Théorème de la limite monotone** : Soit f une fonction croissante sur $I =]a; b[$.
Alors f admet une limite à droite en a finie (si f est minorée) ou égale à $-\infty$ et f admet une limite à gauche en b finie (si f est majorée) ou égale à $+\infty$.
Résultat à adapter si f est décroissante.
— **Théorème des gendarmes** : Soient f, g, et h trois fonctions définies sur le même intervalle I et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que f et h admettent la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en x_0 et que au voisinage de x_0 on a $f \leqslant g \leqslant h$.
Alors $\lim\limits_{x_0} g = \ell$.
— **Théorème des valeurs intermédiaires** : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.
Alors pour tout réel k compris entre les réels $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.
— **Théorème de bijection monotone** : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Alors f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$.
De plus la bijection réciproque f^{-1} est continue et monotone sur J, et son sens de variation est le même que celui de f.
— **Théorème des accroissements finis** : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.
Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
— **Théorème de Rolle** : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.
— **Formules de Taylor-Young** :
  * Au voisinage de 0 : Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I contenant 0. Alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} h^k + o(h^n).$$

  * Au voisinage de x_0 (*à la limite du programme*) : Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I et si $x_0 \in I$. Alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :

$$f(x_0 + h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n).$$

ou encore

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Méthode : déterminer une équation d'une asymptote

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

— S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.

— S'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$), alors la droite d'équation $y = y_0$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

— Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, il existe deux méthodes à votre programme pour déterminer si $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.

  * <u>Méthode 1 :</u> utilisation de calculs de limites

  Étape 1 : Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Si cette limite vaut 0 ou $\pm\infty$, $\mathscr{C}_f$ n'admet pas d'asymptote. Sinon on note $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}^*$ et on passe à l'étape 2.

  Étape 2 : Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax$. Si cette limite vaut $\pm\infty$, $\mathscr{C}_f$ n'admet pas d'asymptote. Sinon on note $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax$ et on conclut que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

  * <u>Méthode 2 :</u> utilisation d'un développement limité

  On effectue le changement de variable $h = \dfrac{1}{x}$ dans l'expression de $f(x)$. Comme $h \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, on peut effectuer des développements limités en h (*en général on utilise des DL d'ordre 2).*

  On revient alors à la variable x et si on obtient une expression du type :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

  on peut affirmer que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Ces méthodes sont à adapter au voisinage de $-\infty$.

Méthode : déterminer si une fonction est continue

- **En un point** : il faut revenir à la définition et donc vérifier que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Attention, il faudra parfois distinguer dans les calculs la limite à gauche de a et la limite à droite de a.
- **Sur un intervalle I non réduit à un point** :
  - * Si f est définie sur TOUT l'intervalle I par une formule utilisant des fonctions usuelles, il suffit d'utiliser l'argument de somme, produit, différence ou quotient de fonctions usuelles continues.

    Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{(x-1)^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{x}$.

    Les fonctions $x \mapsto (x-1)^2$, $x \mapsto -\sqrt{x}$, $t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $x \mapsto x$ sont continues respectivement sur $]0;+\infty[$, $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$, et x ne s'annule pas sur cet intervalle. Donc par composée, produit et quotient de fonctions continues, f est continue sur $]0;+\infty[$.
  - * Si f est définie en plusieurs morceaux alors la justification se passe en plusieurs morceaux.

    Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

    Sur $]-\infty;0[$, f est continue car c'est une fonction usuelle.

    Sur $]0;+\infty[$ f est continue car c'est une fonction usuelle.

    En 0 : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + 1 = 1$. Donc $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, c'est-à-dire f est continue en 0.

    En conclusion f est continue sur $\mathbb{R}$.

Méthode : déterminer si une fonction est dérivable

- **En un point** : il faut revenir à la définition et donc vérifier que $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} =$ limite finie. Attention, il faudra parfois distinguer dans les calculs la limite à gauche de a et la limite à droite de a.
- **Sur un intervalle I non réduit à un point** :
  - * Si f est définie sur TOUT l'intervalle I par une formule utilisant des fonctions usuelles, il suffit d'utiliser l'argument de somme, produit, différence ou quotient de fonctions usuelles dérivables.

    Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{(x-1)^2 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x}$.

    Les fonctions $x \mapsto (x-1)^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et x ne s'annule pas sur cet intervalle. Donc par composée, produit et quotient de fonctions dérivables, f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
  - * Si f est définie en plusieurs morceaux alors la justification se passe en plusieurs morceaux.

    Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

    Sur $]-\infty;0[$, f est dérivable car c'est une fonction usuelle.

    Sur $]0;+\infty[$ f est dérivable car c'est une fonction usuelle.

    En 0 : $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$ et $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x + 1 - 1}{x} = 1$. Donc $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ (limite finie), c'est-à-dire f est dérivable en 0.

    En conclusion f est dérivable sur $\mathbb{R}$.