Exercices : Équations différentielles

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1 :

1. Déterminer la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' - (x+1)(y+1) = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

2. Résoudre sur $]1;+\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$x\ln(x)y' = (1+3\ln(x))y + x^3\ln(x).$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $(t^2+4)y' - y = t^2 - t + 2$.

Ordre 2 à coefficients constants

Exercice 2 :

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $y'' - 5y' + 6y = 3\mathrm{e}^{2t}$, en déterminant une solution particulière de la forme $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{2t}$ où P est une fonction polynômiale de degré 1.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $y'' - 6y' + 9y = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x}$, en déterminant une solution particulière de la forme $x \mapsto ax^2\mathrm{e}^{3x} + b\mathrm{e}^{2x}$ où a et b sont des réels.

3. a) Linéariser le produit $\cos(x)\cos(2x)$.
   b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $y'' + y = \cos(x)\cos(2x)$, en déterminant des solutions particulières d'équations bien choisies de la forme $x(a\cos(x) + b\sin(x))$ et $c\cos(3x) + d\sin(3x)$.

Exercice 3 :

Soit le système différentiel :

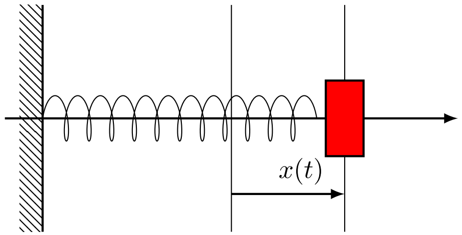
$$(S) \quad \begin{cases} x' = x + 8y + \mathrm{e}^t \\ y' = 2x + y + \mathrm{e}^{-3t} \end{cases}, \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des fonctions dérivables sur } \mathbb{R}.$$

1. Justifier que x est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si (x,y) est une solution de (S) alors x est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants que l'on déterminera. On appellera (E) cette équation.
3. a) Résoudre (E) en cherchant une solution particulière sous la forme $t \mapsto \alpha t\mathrm{e}^{-3t}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
   b) En déduire l'ensemble des solutions de (S).

Exercice 4 :

Un objet de masse m est fixé à un ressort horizontal (caractérisé par sa constante de raideur k) immergé dans un fluide (caractérisé par un coefficient d'amortissement c).

On note $x(t)$ la position (horizontale) de l'objet par rapport à la position d'équilibre en fonction du temps t.



L'équation différentielle satisfaite par la fonction x est alors

$$mx'' + cx' + kx = 0.$$

On considère ici que $m = 2$, $c = 2$ et $k = 5$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.
2. On suppose qu'au temps $t = 0$ on a $x(0) = 2$ et $x'(0) = 3\sqrt{3} - 1$. Déterminer x.
3. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$.
4. Déterminer le plus petit temps $t_0 > 0$ tel que $x(t_0) = 0$.

Équation différentielle autonome

Exercice 5 : Modèle de Gomperz

Des observations expérimentales ont montré que l'évolution du nombre de cellules cancéreuses dans une tumeur répond assez bien à l'équation différentielle :

$$(E) \qquad \begin{cases} y' = -r\ln\left(\dfrac{y}{K}\right)y \\ y(0) > 0 \end{cases}$$

où r et K sont des réels strictement positifs.

1. Déterminer la ou les solutions constantes de (E) sur $[0;+\infty[$.

On appelle une de ces solutions un *équilibre* de l'équation. On admet que les solutions φ non constantes de (E) sur $[0;+\infty[$ ne prennent jamais la valeur d'un équilibre sur $[0;+\infty[$. On étudie à présent ces solutions non constantes telles que que $\varphi(0) < K$. Soit donc φ une solution de (E) sur $[0;+\infty[$, non constante et telle que $\varphi(0) < K$.

2. a) Montrer : $\forall t \geqslant 0,\ \varphi(t) < K$.
   b) Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que :
   $$\forall t \geqslant 0, \quad -\ln\left(\frac{\varphi(t)}{K}\right) = \mathrm{e}^{-r(t+C)}.$$
3. Déterminer φ en fonction de r, $\varphi(0)$ et K et déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t)$.

Recollement de solutions

Exercice 6 :

On considère l'équation différentielle ci-dessous :

$$|x|y' + (x-1)y = x^3 \quad (E)$$

1. **Résolution sur $\mathbb{R}^{+*}$**
   a) Rechercher sur $\mathbb{R}^{+*}$ une solution particulière de (E), polynômiale du second degré.
   b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. **Résolution sur $\mathbb{R}^{-*}$**
   a) Vérifier que $x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6}{x}$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.
   b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.
3. **Recherche d'une solution sur $\mathbb{R}$**
   Dans cette question on cherche à savoir s'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ |x|f'(x) + (x-1)f(x) = x^3.$$
   a) Supposons qu'une telle fonction f existe.
      (i) Donner l'expression de $f(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$ puis pour $x \in]-\infty;0[$.
      (ii) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$, puis calculer les limites en 0^+ et en 0^- de f et en déduire alors l'expression de $f(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$, $x \in]-\infty;0[$ et $x = 0$.
      (iii) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Que peut-on en déduire ?
   b) Réciproquement, vérifier que la fonction f trouvée dans la question précédente satisfait bien au problème donné.

Pour aller plus loin...

Exercice 7 :

On propose de résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle :

$$(\mathscr{E}) : \quad y'' + \frac{1}{2x^2}y = 0.$$

1. Soit y une fonction solution du problème.
   On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $\ z(t) = y(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$.
   a) Exprimer $y(x)$ en fonction de $z(\ln(x))$ pour $x > 0$.
   b) En déduire que la fonction $t \mapsto z(t)$ vérifie sur $\mathbb{R}$ une équation $(\mathscr{E}')$ d'ordre 2 à coefficients constants.
   c) Résoudre $(\mathscr{E}')$.
2. Résoudre l'équation $(\mathscr{E})$.

Exercice 8 :

On cherche dans cet exercice à déterminer toutes les fonctions $f :]0+\infty[$ continues et solutions du problème (E) suivant :

$$(E) \qquad \forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = \frac{1}{x^2}\int_1^x \left(\frac{1}{2}t^2\ln(t) - \frac{t^2}{4} + 3tf(t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que, si f est une fonction continue solution de (E) alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
2. Montrer que, si f est une fonction continue solution de (E) alors f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 que l'on donnera.
3. En déduire l'ensemble de solutions de (E) sur $]0;+\infty[$.

Exercice 9 :

Trouver les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables, telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x).$$

Correction

Correction de l'exercice 1 :

1. (i) Commençons par résoudre l'équation homogène associée :

$$y' - (x+1)y = 0.$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a(x) = -(x+1)$. a est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et une primitive de a sur $\mathbb{R}$ est la fonction A définie sur $\mathbb{R}$ par $A(x) = -\dfrac{1}{2}(x+1)^2$.

(*On peut aussi prendre* $A(x) = -\dfrac{x^2}{2} - x$.)

Ainsi, les solutions de l'équation homogène, sont les fonctions de la forme y_H : $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{(x+1)^2}{2}}$, définies sur $\mathbb{R}$ et avec C une constante réelle fixée.

(ii) Recherchons maintenant une solution particulière de l'équation complète :

$$y' - (x+1)(y+1) = 0.$$

Attention : ne pas se lancer dans une variation de la constante.

La fonction constante $x \mapsto -1$ est visiblement solution de cette équation.

Ainsi, les solutions de l'équation complète sont les fonctions de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{(x+1)^2}{2}} - 1$, définies sur $\mathbb{R}$ et avec C constante réelle fixée.

(iii) Déterminons maintenant la solution du problème de Cauchy. Nous avons vu que si y est solution du problème de Cauchy demandé, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{(x+1)^2}{2}} - 1$.

De plus, la condition $y(0) = 1$ nous donne $C\mathrm{e}^{1/2} - 1 = 1$, c'est-à-dire $C = 2\mathrm{e}^{-1/2}$.

Pour conclure, la solution du problème de Cauchy demandé est la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = 2\mathrm{e}^{-1/2}\mathrm{e}^{\frac{(x+1)^2}{2}} - 1 = 2\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+x} - 1.$$

2. (i) Déterminons tout d'abord les solutions de l'équation homogène associée :

$$x\ln(x)y' - (1+3\ln(x))y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{1+3\ln(x)}{x\ln(x)}y = 0,$$

car pour $x \in]1;+\infty[$, $x\ln(x) \neq 0$.

On pose, pour tout $x \in]1;+\infty[$, $a(x) = -\dfrac{1+3\ln(x)}{x\ln(x)}$. La fonction a est continue sur $]1;+\infty[$ et une primitive de a sur $]1;+\infty[$ est la fonction A définie par $A(x) = -\ln(|\ln(x)|) - 3\ln(|x|)$.

Or, sur $]1;+\infty[$, x et $\ln(x)$ sont positifs, donc $A(x) = -\ln(x^3\ln(x))$.

On sait alors que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $y_H : x \mapsto C\mathrm{e}^{\ln(x^3\ln(x))} = Cx^3\ln(x)$, définies sur $]1;+\infty[$ et avec C une constante réelle fixée.

(ii) Déterminons maintenant une solution particulière de l'équation complète :

$$x\ln(x)y' - (1+3\ln(x))y = x^3\ln(x).$$

Aucune solution évidente ici, nous allons donc utiliser la méthode de variation de la constante.

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = u(x)x^3\ln(x)$ où u est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

On a alors $y_p'(x) = u'(x)x^3\ln(x) + u(x)\left(3x^2\ln(x) + x^2\right)$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
&y_p \text{ est solution de l'équation}\\
\Leftrightarrow &x\ln(x)\left(u'(x)x^3\ln(x) + u(x)\left(3x^2\ln(x)+x^2\right)\right)\\
&\qquad - (1+3\ln(x))u(x)x^3\ln(x) = x^3\ln(x)\\
\Leftrightarrow &x^4\ln(x)^2u'(x) = x^3\ln(x)\\
\Leftrightarrow &u'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}
\end{aligned}$$

On choisit donc de prendre $u(x) = \ln(|\ln(x)|)$.

La fonction $x \mapsto x^3\ln(x)\ln(\ln(x))$ est une solution de l'équation complète.

En conclusion, les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $x \mapsto Cx^3\ln(x) + x^3\ln(x)\ln(\ln(x))$, définies sur $]1;+\infty[$ et avec C une constante réelle fixée.

3. (i) Commençons par résoudre l'équation homogène associée :

$$(t^2+4)y' - y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{t^2+4}y = 0,$$

car pour tout réel t, $t^2 + 4 \neq 0$.

On pose alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a(t) = \dfrac{1}{t^2+4}$. La fonction a est continue sur $\mathbb{R}$ et comme $a(x) = -\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}$, une primitive de a sur $\mathbb{R}$ est la fonction A définie sur $\mathbb{R}$ par $A(t) = -\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

Ainsi, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right)}$, définies sur $\mathbb{R}$ et où C est une constante réelle fixée.

(ii) Déterminons maintenant une solution de l'équation complète :

$$(t^2+4)y' - y = t^2 - t + 2.$$

Tous les coefficients étant polynômiaux il est intéressant de regarder si il est possible de trouver une solutions polynômiale.
En supposant que y est un polynôme, si on compare le degré des deux parties de l'équation on remarque que y est nécessairement un polynôme de degré 1.
On cherche donc une solution sous la forme $t \mapsto at + b$. Cette fonction est une solution si, et seulement si :

$$(t^2+4)\times a - at - b = t^2 - t + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -a = -1 \\ 4a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

La fonction $t \mapsto t + 2$ est une solution de l'équation complète.

En conclusion, les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right)} + t + 2$, définies sur $\mathbb{R}$ et où C est une constante réelle fixée.

Correction de l'exercice 2 :

1. (i) On cherche TOUTES les solutions de l'équation homogène : $y'' - 5y' + 6y = 0$.
On cherche y_H sous la forme $t \mapsto e^{rt}$ avec $r \in \mathbb{C}$ solution de l'équation caractéristique : $r^2 - 5r + 6 = 0$.
Cette équation admet deux solutions réelles : $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme : $t \mapsto y_H(t) = Ae^{2t} + Be^{3t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) On cherche UNE solution particulière de l'équation complète sous la forme $y_p(t) = (at+b)e^{2t}$, avec a et b des réels.
La fonction y_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t :

$$y_p'(t) = (2at + 2b + a)e^{2t}$$
$$y_p''(t) = (4at + 4b + 4a)e^{2t}.$$

Donc y_p est solution de notre équation si, et seulement si :

$$\begin{aligned} &\forall t \in \mathbb{R}, \quad (4at + 4b + 4a)e^{2t} - 5(2at + 2b + a)e^{2t} + 6(at+b)e^{2t} = 3e^{2t} \\ \Leftrightarrow &\forall t \in \mathbb{R}, \quad -ae^{2t} = 3e^{2t} \\ \Leftrightarrow &\forall t \in \mathbb{R}, \quad -a = 3 \qquad \text{car } e^{2t} \neq 0. \end{aligned}$$

On a donc $a = -3$ et on peut choisir la valeur de b que l'on souhaite.
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(t) = -3te^{2t}$ est une solution particulière de l'équation complète.

On a donc $\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto Ae^{2t} + Be^{3t} - 3te^{2t} \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

2. (i) On cherche TOUTES les solutions de l'équation homogène : $y'' - 6y' + 9y = 0$.
On cherche y_H sous la forme $x \mapsto e^{rx}$ avec $r \in \mathbb{C}$ solution de l'équation caractéristique : $r^2 - 6r + 9 = 0$.
Cette équation admet une solution réelle : $r_0 = 3$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme : $x \mapsto y_H(x) = (Ax + B)e^{3x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) On cherche UNE solution particulière de l'équation complète sous la forme $y_p(x) = ax^2e^{3x} + be^{2x}$ où a et b sont des réels.
La fonction y_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$y_p'(x) = (2ax + 3ax^2)e^{3x} + 2be^{2x}$$
$$y_p''(x) = (9ax^2 + 12ax + 2a)e^{3x} + 4be^{2x}.$$

Donc y_p est solution de notre équation si, et seulement si :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, \quad (9ax^2 + 12ax + 2a)e^{3x} + 4be^{2x} - 6\left((2ax + 3ax^2)e^{3x} + 2be^{2x}\right) \\ &\qquad\qquad + 9\left(ax^2e^{3x} + be^{2x}\right) = e^{2x} + e^{3x} \\ \Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2ae^{3x} + be^{2x} = e^{2x} + e^{3x} \end{aligned}$$

On peut choisir de prendre $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 1$.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(x) = \dfrac{1}{2}x^2e^{3x} + e^{2x}$ est une solution particulière de l'équation complète.

On a donc $\mathscr{S} = \left\{ x \mapsto (Ax + B)e^{3x} + \dfrac{1}{2}x^2e^{3x} + e^{2x} \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

3. a) D'après nos formules de trigonométrie :

$$\cos(x)\cos(2x) = \frac{1}{2}\cos(2x - x) + \frac{1}{2}\cos(2x + x) = \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Autre méthode : Pour linéariser sans les formules de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$, il faut écrire (formule d'Euler) $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\cos(2x) = \dfrac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}$.
Puis on développe, on réordonne et on réutilise des formules d'Euler.

b) (i) Commençons par déterminer les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'' + y = 0.$$

Les solutions réelles de cette équation sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$, définies sur $\mathbb{R}$ et où A et B sont des constantes réelles.

(ii) Déterminons maintenant une solution de l'équation complète :

$$y'' + y = \cos(x)\cos(2x) \Leftrightarrow y'' + y = \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Nous allons alors utiliser le principe de superposition, c'est-à-dire que nous allons déterminer une fonction y_1 solution de $y''+y = \frac{1}{2}\cos(x)$ et une fonction y_2 solution de $y'' + y = \frac{1}{2}\cos(3x)$, puis nous pourrons dire que $y_1 + y_2$ est solution de l'équation de l'énoncé.

On cherche y_1 sous la forme $x \mapsto x(a\cos(x) + b\sin(x))$ *(car* i *est solution de l'équation caractéristique* $r^2 + 1 = 0$*)*.

On a alors $y_1'(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + x(-a\sin(x) + b\cos(x))$ et

$$y_1''(x) = -2a\sin(x) + 2b\cos(x) + x(-a\cos(x) - b\sin(x)).$$

y_1 est solution de $y'' + y = \frac{1}{2}\cos(x)$ si, et seulement si :

$$2a\sin(x) + 2b\cos(x) + x(-a\cos(x) - b\sin(x)) + x(a\cos(x) + b\sin(x)) = \frac{1}{2}\cos(x)$$

On peut choisir de prendre $a = 0$ et $b = \frac{1}{4}$.

La fonction $y_1 : x \mapsto \frac{x}{4}\sin(x)$ est solution de $y'' + y = \frac{1}{2}\cos(x)$.

On cherche y_2 sous la forme $x \mapsto c\cos(3x)+d\sin(3x)$ car 3i n'est pas solution de l'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$.

On a alors $y_2'(x) = -3c\sin(3x) + 3d\cos(3x)$ et

$$y_2''(x) = -9c\cos(3x) - 9d\sin(3x).$$

y_2 est solution de $y'' + y = \frac{1}{2}\cos(3x)$ si, et seulement si :

$$-9c\cos(3x) - 9d\sin(3x) + c\cos(3x) + d\sin(3x) = \frac{1}{2}\cos(3x).$$

On peut choisir de prendre $c = -\frac{1}{16}$ et $d = 0$.

La fonction $y_2 : x \mapsto \frac{-1}{16}\cos(3x)$ est solution de $y'' + y = \frac{1}{2}\cos(3x)$.

Pour finir, la fonction $x \mapsto \frac{x}{4}\sin(x) - \frac{1}{16}\cos(3x)$ est une solution de l'équation de l'énoncé.

En conclusion, les solutions réelles de l'équation de l'énoncé sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + \frac{x}{4}\sin(x) - \frac{1}{16}\cos(3x),$$

définies sur $\mathbb{R}$ et où A et B sont des constantes réelles.

Correction de l'exercice 3 :

1. Comme x, y et $t \mapsto e^t$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, l'égalité $x' = x + 8y + e^t$ nous indique que x' est donc aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Ainsi, x est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De même y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   De plus $x'' = x' + 8y' + e^t$ et comme x', y' $t \mapsto e^t$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ elles sont continues donc x'' est continue sur $\mathbb{R}$.
   Ainsi x est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Reprenons la question précédente :
   $$x'' = x' + 8y' + e^t.$$
   D'après la deuxième équation du système, $y' = 2x + y + e^{-3t}$ donc :
   $$x'' = x' + 16x + 8y + 8e^{-3t} + e^t.$$
   Et d'après la première équation du système, $8y = x' - x - e^t$. Donc :
   $$x'' = x' + 16x + 8y + 8e^{-3t} + e^t = x' + 16x + x' - x - e^t + 8e^{-3t} + e^t = 2x' + 15x + 8e^{-3t}.$$
   Ainsi, si x et y sont solutions du système, alors x est solution de :
   $$x'' - 2x' - 15x = 8e^{-3t}. \qquad (E)$$
3. a) Les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont de la forme $t \mapsto Ae^{-3t} + Be^{5t}$ (*à vous de le rédiger*).
   On cherche une solution particulière sous la forme $x(t) = \alpha te^{-3t}$.
   $$\begin{aligned} x \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha(-6 + 9t)e^{-3t} - 2\alpha(1 - 3t)e^{-3t} - 15\alpha te^{-3t} = 8e^{-3t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ -8\alpha e^{-3t} = 8e^{-3t} \\ &\Leftrightarrow \alpha = -1. \end{aligned}$$
   Donc $\mathscr{S}_E = \left\{t \mapsto Ae^{-3t} + Be^{5t} - te^{-3t} / (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

   b) Comme $y = \frac{1}{8}(x' - x - e^t)$, on en déduit que :
   $$(x, y) \text{ solution de } (S) \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = Ae^{-3t} + Be^{5t} - te^{-3t} \\ y(t) = -\frac{A}{2}e^{-3t} + \frac{B}{2}e^{5t} + \frac{t}{2}e^{-3t} - \frac{1}{8}e^{-3t} - \frac{1}{8}e^t \end{cases}.$$
   On peut vérifier réciproquement que les fonctions données ci-dessus sont bien solutions de (S).

Correction de l'exercice 4 :

1. Nous avons ici une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique associée est :

$$2r^2 + 2r + 5 = 0.$$

Cette équation admet deux racines complexes conjuguées $r = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\mathrm{i}$.

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2} \left(A\cos(3t/2) + B\sin(3t/2) \right) \ / \ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. On sait, d'après la question 1., qu'il existe deux réels tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = \mathrm{e}^{-t/2}\left(A\cos(3t/2) + B\sin(3t/2)\right)$.

Donc

$$\begin{cases} x(0) = 2 \\ x'(0) = 3\sqrt{3} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ \dfrac{3B}{2} - \dfrac{A}{2} = 3\sqrt{3} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

On a donc, pour tout réel t, $x(t) = 2\mathrm{e}^{-t/2}\left(\cos(3t/2) + \sqrt{3}\sin(3t/2)\right)$.

3. La fonction $t \mapsto \cos(3t/2) + \sqrt{3}\sin(3t/2)$ est bornée et $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t/2} = 0$.

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

4. Comme $\mathrm{e}^{-t/2} \neq 0$ quelque soit le réel t, on a $x(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(3t/2) + \sqrt{3}\sin(3t/2) = 0$.

Pour résoudre ce type d'équation, il est nécessaire de factoriser l'expression trigonométrique.

L'astuce consiste à faire apparaitre l'une des formules d'addition, en faisant apparaitre des cosinus et sinus d'angles remarquables. On a par exemple ici :

$$\begin{aligned} \cos(3t/2) + \sqrt{3}\sin(3t/2) &= 2\left(\frac{1}{2}\cos(3t/2) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3t/2)\right) \\ &= 2\left(\cos(\pi/3)\cos(3t/2) + \sin(\pi/3)\sin(3t/2)\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} x(t) = 0 &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3t}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow t = \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On en déduit que $t_0 = \frac{5\pi}{9}$.

Correction de l'exercice 5 :

1. Si $y(t) = a$ pour tout t, y est solution de (E) si, et seulement si :

$$\begin{cases} 0 = -r\ln\left(\dfrac{a}{K}\right)a \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ ou } a = K \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = K.$$

La seule solution constante solution de (E) est la fonction $y : t \mapsto K$.

2. a) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe t_0 tel que $\varphi(t_0) \geqslant K$. Comme φ est continue sur $[0;t_0]$ et que $\varphi(0) < K$, d'après le théorème des valeurs intermédiaire, il existe un réel $t_1 \in]0;t_0[$ tel que $\varphi(t_1) = K$.

Ceci entre en contradiction avec ce qui a été admis, c'est-à-dire que une solution non constante ne prend jamais la valeur d'équilibre K.

Ainsi, pour tout $t \in [0;+\infty[$, $\varphi(t) < K$.

b) Comme $0 < \varphi(t) < k$, on a, pour tout $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} &\varphi'(t) = -r\ln\left(\frac{\varphi(t)}{K}\right)\varphi(t) \\ \Leftrightarrow &-\varphi'(t) \times \frac{1/\varphi(t)}{r\ln\left(\frac{\varphi(t)}{K}\right)} = -r \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{r}\ln\left|\ln\left(\frac{\varphi}{K}\right)\right|\right)'(t) = 1 \\ \Leftrightarrow &-\frac{1}{r}\ln\left|\ln\left(\frac{\varphi(t)}{K}\right)\right| = t + C \\ \Leftrightarrow &-\ln\left(\frac{\varphi(t)}{K}\right) = \mathrm{e}^{-r(t+C)} \qquad \text{car } \left|\ln\left(\frac{\varphi(t)}{K}\right)\right| = -\ln\left(\frac{\varphi(t)}{K}\right) \end{aligned}$$

3. À l'aide du calcul précédente, on obtient $\varphi(t) = K\exp\left(-\mathrm{e}^{-r(t+C)}\right)$.

De plus $C = -\frac{1}{r}\ln\left(-\ln(\varphi(0)/K)\right)$.

Donc $\varphi(t) = K \exp\left(\mathrm{e}^{-rt} \times \ln\left(\frac{\varphi(0)}{K}\right)\right)$.

Comme $r > 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = K$.

Correction de l'exercice 6 :

1. a) Soit $y : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$). y est bien dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x(2ax+b) + (x-1)(ax^2+bx+c) = x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}.$$

On en conclut que $y_p : x \mapsto x^2 - x$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) L'équation homogène associée à (E) est $(H) : |x|y' + (x-1)y = 0$.

Sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme $x \neq 0$, on a $(H) \Leftrightarrow y' + \left(1 - \frac{1}{x}\right) y = 0$.

La fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et une primitive est $x \mapsto x - \ln(x)$.
Donc les solutions de (H) sont les fonctions telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_H(x) = \lambda \mathrm{e}^{-x+\ln(x)} = \lambda x \mathrm{e}^{-x}$

D'après le théorème de structure, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont les fonctions telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad y(x) = x^2 - x + \lambda x \mathrm{e}^{-x}.$$

2. a) $y_p : x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ par somme et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, \quad -xy_p'(x) + (x-1)y_p(x) &= -x\left(2x + 3 - \frac{6}{x^2}\right) + (x-1)\left(x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x}\right) \\ &= -2x^2 - 3x + \frac{6}{x} + x^3 - x^2 + 3x^2 \\ &\quad - 3x + 6x - 6 + 6 - \frac{6}{x} \\ &= x^3.\end{aligned}$$

Donc cette fonction est bien une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.

b) Sur $\mathbb{R}^{-*}$, l'équation homogène associée est équivalente à $y' + \left(-1 + \frac{1}{x}\right) y = 0$.

La fonction $x \mapsto -1 + \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{-*}$ et une primitive est $x \mapsto -x + \ln(|x|)$, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions telles qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \mu \mathrm{e}^{x - \ln|x|} = -\frac{\mu \mathrm{e}^x}{x}$.

Donc, d'après le théorème de structure, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$ sont les fonctions telles qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, \quad y(x) = x^2 + 3x + 6 + \frac{6 - \mu \mathrm{e}^x}{x}.$$

3. a) (i) f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ donc il existe λ et μ tels que :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + \lambda x \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 3x + 6 + \frac{6 - \mu \mathrm{e}^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

(ii) Comme f est supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - x + \lambda x \mathrm{e}^{-x} = 0$ et :

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 + 3x + 6 + \frac{6 - \mu \mathrm{e}^x}{x} = \begin{cases} -\infty & \text{si } \mu < 6 \\ 0 & \text{si } \mu = 6 \\ +\infty & \text{si } \mu > 6 \end{cases} \left(\text{car } \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1\right).$$

Donc, comme f doit être continue en 0, on a forcément $\mu = 6$ et donc

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + \lambda x \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 3x + 6 + 6\frac{1 - \mathrm{e}^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

(iii) Pour $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x - 1 + \lambda \mathrm{e}^{-x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lambda - 1$.

Pour $x < 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x + 3 + 6\frac{x + 1 - \mathrm{e}^x}{x^2}$. Or $x + 1 - \mathrm{e}^x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 3 - 3 = 0$.

Or on a supposé au début de cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0. On doit donc avoir $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, et donc on a forcément $\lambda = 1$.

En conclusion, s'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |x|f'(x) + (x-1)f(x) = x^3,$$

alors nécessairement $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + x\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 3x + 6 + 6\dfrac{1 - \mathrm{e}^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

b) Par construction, la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + x\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 3x + 6 + 6\dfrac{1 - \mathrm{e}^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ (dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ d'après les théorème généraux et dérivable en 0 d'après les calculs de la question 3.a)(iii)).

De plus, $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 - x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x + 3 + 6\dfrac{(1 - x)\mathrm{e}^x - 1}{x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Donc :

— Pour $x > 0$: $xf'(x) + (x - 1)f(x) = 2x^2 - x - x^2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} + (x - 1)(x^2 - x + x\mathrm{e}^{-x}) = x^3$.
<u>Autre méthode :</u> sur $\mathbb{R}^{+*}$, f est de la forme des solutions données à la question 1.b) donc, pour $x > 0$, $xf'(x) + (x - 1)f(x) = x^3$.

— Pour $x =$: $0f'(0) + (0 - 1)f(0) = 0 = 0^3$.

— Pour $x < 0$: $-xf'(x) + (x - 1)f(x) = -2x^2 - 3x - 6\dfrac{(1 - x)\mathrm{e}^x - 1}{x} + (x - 1)\left(x^2 + 3x + 6 + 6\dfrac{1 - \mathrm{e}^x}{x}\right) = x^3$.
<u>Autre méthode :</u> sur $\mathbb{R}^{-*}$, f est de la forme des solutions données à la question 2.b) donc, pour $x < 0$, $xf'(x) + (x - 1)f(x) = x^3$.

La fonction f satisfait bien au problème donné.

Correction de l'exercice 7 :

1. Soit y une fonction solution du problème. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$.

a) Pour $x > 0$, on pose $x = \mathrm{e}^t$ ($t = \ln x$). On a :

$$z(\ln x) = y(x)\mathrm{e}^{-\frac{\ln x}{2}} = \frac{y(x)}{\sqrt{x}}.$$

Donc $y(x) = z(\ln x)\sqrt{x}$.

b) On dérive l'expression $y(x) = z(\ln x)\sqrt{x}$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}z(\ln x) + \sqrt{x} \times \frac{1}{x} \times z'(\ln x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(z'(\ln x) + \frac{1}{2}z(\ln x)\right). \end{aligned}$$

En dérivant une seconde fois, on obtient :

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\frac{1}{2x\sqrt{x}}\left(z'(\ln x) + \frac{1}{2}z(\ln x)\right) + \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x}z''(\ln x) + \frac{1}{2x}z'(\ln x)\right) \\ y''(x) &= \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(z''(\ln x) - \frac{1}{4}z(\ln x)\right). \end{aligned}$$

Or, $y''(x) + \dfrac{1}{2x^2}y(x) = 0$, donc par substitution :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(z''(\ln x) - \frac{1}{4}z(\ln x)\right) + \frac{1}{2x^2}z(\ln x)\sqrt{x} &= 0 \\ \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(z''(\ln x) - \frac{1}{4}z(\ln x) + \frac{1}{2}z(\ln x)\right) &= 0 \\ z''(\ln x) + \frac{1}{4}z(\ln x) &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne, avec la relation $t = \ln x$:

$$z''(t) + \frac{1}{4}z(t) = 0.$$

Donc la fonction $t \mapsto z(t)$ est solution de l'équation : $(\mathscr{E}')$: $z'' + \dfrac{1}{4}z = 0$.

c) Les solutions réelles générales de $(\mathscr{E}')$ sont les fonctions de la forme :

$$z = \alpha\cos\frac{t}{2} + \beta\sin\frac{t}{2} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

2. D'après la question 1, si y est solution de $(\mathscr{E})$, alors $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{x}z(\ln x) \\ &= \sqrt{x}\left(\alpha\cos\left(\frac{\ln x}{2}\right) + \beta\sin\left(\frac{\ln x}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Réciproquement, si $y(x)=\sqrt{x}\left(\alpha\cos\left(\frac{\ln x}{2}\right)+\beta\sin\left(\frac{\ln x}{2}\right)\right)$, alors :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\alpha\cos\left(\frac{\ln x}{2}\right)+\beta\sin\left(\frac{\ln x}{2}\right)\right) \\ &\quad +\sqrt{x}\left(-\frac{\alpha}{2x}\sin\left(\frac{\ln x}{2}\right)+\frac{\beta}{2x}\cos\left(\frac{\ln x}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left((\alpha+\beta)\cos\left(\frac{\ln x}{2}\right)+(\beta-\alpha)\sin\left(\frac{\ln x}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\left((\alpha+\beta)\cos\left(\frac{\ln x}{2}\right)+(\beta-\alpha)\sin\left(\frac{\ln x}{2}\right)\right) \\ &\quad +\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-\frac{\alpha+\beta}{2x}\sin\left(\frac{\ln x}{2}\right)+\frac{\beta-\alpha}{2x}\cos\left(\frac{\ln x}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4x\sqrt{x}}\left(-2\alpha\cos\left(\frac{\ln x}{2}\right)-2\beta\sin\left(\frac{\ln x}{2}\right)\right). \\ y''(x) = &= -\frac{1}{2x\sqrt{x}}\left(\alpha\cos\left(\frac{\ln x}{2}\right)+\beta\sin\left(\frac{\ln x}{2}\right)\right)=-\frac{y(x)}{2x^2}. \end{aligned}$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $y''(x)+\frac{1}{2x^2}y(x)=0$, et y est solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Les solutions générales de l'équation $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme :

$$y=\sqrt{x}\left(\alpha\cos\left(\frac{\ln x}{2}\right)+\beta\sin\left(\frac{\ln x}{2}\right)\right)\qquad(\alpha,\beta\in\mathbb{R}).$$

Correction de l'exercice 8 :

1. On suppose dans l'énoncé que f est continue. Donc la fonction $t\mapsto\frac{1}{2}t^2\ln(t)-\frac{t^2}{4}+3tf(t)$ est continue sur $]0;+\infty[$, et comme $1\in]0;+\infty[$ par théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x\mapsto\int_1^x\left(\frac{1}{2}t^2\ln(t)-\frac{t^2}{4}+3tf(t)\right)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
Comme $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et que $f(x)=\frac{1}{x^2}\int_1^x\left(\frac{1}{2}t^2\ln(t)-\frac{t^2}{4}+3tf(t)\right)\,dt$, on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
On pourrait montrer par récurrence que f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n, c'est-à-dire de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2. Supposons que f est une fonction continue solution de (E). Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ et :

$$\begin{aligned} &\forall x>0, f(x)=\frac{1}{x^2}\int_1^x\left(\frac{1}{2}t^2\ln(t)-\frac{t^2}{4}+3tf(t)\right)\,dt \\ &\Longrightarrow\forall x>0,\ x^2f(x)=\int_1^x\left(\frac{1}{2}t^2\ln(t)-\frac{t^2}{4}+3tf(t)\right)\,dt \\ &\Longrightarrow\forall x>0,\ 2xf(x)+x^2f'(x)=\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{x^2}{4}+3xf(x) \\ &\Longrightarrow\forall x>0,\ xf'(x)-f(x)=\frac{1}{2}x\ln(x)-\frac{x}{4} \\ &\Longrightarrow f \text{ est solution de } xy'-y=\frac{1}{2}x\ln(x)-\frac{x}{4} \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}. \end{aligned}$$

3. Les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle $xy'-y=\frac{1}{2}x\ln(x)-\frac{x}{4}$, sont les fonctions de la forme

$$y(x)=Kx+\frac{x\ln(x)(\ln(x)-1)}{4},\ \text{avec } C\in\mathbb{R}.$$

On a vu précédemment que si f est solution de (E) alors f vérifie l'équation différentielle ci-dessus. Mais on sait aussi que si f est solution de (E) alors $f(1)=0$.
En tenant compte de cette condition initiale, on peut donc affirmer que si f est solution de (E) alors

$$\forall x>0,\ f(x)=\frac{x\ln(x)(\ln(x)-1)}{4}.$$

Réciproquement, vérifions que la fonction $f:x\mapsto\frac{x\ln(x)(\ln(x)-1)}{4}$ est bien solution du problème (E).
Astuce : au lieu de calculer $\frac{1}{x^2}\int_1^x\left(\frac{1}{2}t^2\ln(t)-\frac{t^2}{4}+3tf(t)\right)\,dt$ et de vérifier que cela est bien égal à $f(x)$, on peut vérifier que $x^2f(x)$ est l'unique primitive de $x\mapsto\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{x^2}{4}+3xf(x)$, qui s'annule en 1.
Calculons donc :

$$\begin{aligned} (x^2f(x))' &= \left(\frac{x^3\ln(x)(\ln(x)-1)}{4}\right)' \\ &= \frac{1}{4}\left(3x^2\ln(x)(\ln(x)-1)+x^2(\ln(x)-1)+x^2\ln(x)\right) \\ &= 3xf(x)+\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

Donc $x \mapsto x^2 f(x)$ est bien une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{x^2}{4} + 3xf(x)$. Et de plus $1^2 f(1) = 0$, donc on a bien :

$$x^2 f(x) = \int_1^x \left(\frac{1}{2}t^2\ln(t) - \frac{t^2}{4} + 3tf(t)\right)\, \mathrm{d}t.$$

En conclusion, l'unique fonction continue solution du problème (E) est la fonction :

$$x \mapsto \frac{x\ln(x)(\ln(x)-1)}{4}.$$

Correction de l'exercice 9 :

Analyse : Supposons que f est une solution du problème.

En utilisant l'équation fonctionnelle proposée pour $x = 0$ et $y = 0$, on démontre que si f est solution du problème, alors $f(0) = 0$.

On dérive la fonction $x \mapsto f(x+y)$ et l'on obtient alors l'équation :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f'(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f'(x)$, ce qui fournit, pour $x = 0$:

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f'(y) = f(y) + \mathrm{e}^y f'(0).$$

La fonction f est donc solution de l'équation $y' - y = k\mathrm{e}^t$, où $k = f'(0)$.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $y(t) = (\lambda + kt)\,\mathrm{e}^t$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Or, on a la condition $f(0) = 0$ donc $\lambda = 0$.

Ainsi, si f est solution du problème, elle doit être de la forme $f(t) = kt\mathrm{e}^t$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Synthèse :

Vérifions que les fonctions trouvée à l'analyse sont bien toutes solution du problème.

On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$k(x+y)\mathrm{e}^{x+y} = kx\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y + ky\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^x(ky\mathrm{e}^y) + \mathrm{e}^y(kx\mathrm{e}^x)$$

Donc toutes les fonctions définies par $f(t) = k\mathrm{e}^t$ sont solutions du problème et ce sont les seules.