Consignes de travail et début d'année

BCPST2

Vous connaîtrez la classe où vous êtes affectés à la rentrée. Le travail à faire et les conseils sont identiques dans les deux cas, seule changera la date des premiers cours et de la première interrogation.
Pour toute(s) question(s) vous pouvez nous joindre par mail :

etournesac@gmail.com ou bcpst@lafond.eu

Tous les documents sont aussi disponibles sur nos sites internet respectifs :

`https://etournesac.wixsite.com/mathsprepa` ou `https://cahier-de-prepa.fr/spebio2-champollion/`

Début d'année

— Vous devez avoir révisé vos cours de sup sur les polynômes, les fonctions (continuité, dérivabilité, fonctions usuelles, calculs de limites, développement limités ...) et les suites. Vous pourrez aussi vous aider de la fiche résumée sur les fonctions qui vous a été distribuée.

— Préparer TOUS les exercices de la feuille de TD « Limites, continuité,... »Ces exercices seront corrigés en classe lors des premiers cours.

— Rédiger sur une (ou plusieurs) copie(s) double(s) le problème ci-dessous.

— Lors du premier cours de mathématiques le 2 ou le 3 septembre vous aurez une petite interrogation sur des calculs très basiques : manipulations d'inégalités, calculs avec des puissances et des fractions, calculs de limite simples, calculs de dérivées..., ainsi que des questions de cours sur le contenu de la fiche de résumé.

Conseils pour organiser vos révisions

— Les 18, 19, 20 août : réviser vos cours de sup, et, si besoin, faire vos propres petites fiches avec les définitions, les théorèmes les plus importants, les formules (dérivées, limites, trigonométrie, équivalents, développements limités ...), ...

— À partir du 21 (hors week-end) : faire chaque jour un exercice, avancer un peu le DM et reprendre les chapitres qui sont encore fragiles.

DM1

à rendre le jour de la rentrée

Il ne faut pas hésiter à nous demander des indications par mail !

Nous pensons qu'il faut prévoir environ 4 heures de travail.

Dans ce sujet, on propose d'étudier différents modèles d'évolution de population, et d'étudier les conditions de son extinction. Il est composé de deux problèmes indépendants.

Le **Problème A** propose d'étudier des modèles déterministes qui mettent en valeur une condition d'extinction.

Le **Problème B** propose d'étudier le modèle probabiliste de Galton-Watson.

Une annexe dans laquelle certaines commandes Python sont rappelées est jointe à la fin du sujet. **Pour les questions d'informatique, on considèrera que les importations de modules nécessaires ont été préalablement faites.**

Problème A

Dans ce problème, les questions sont largement indépendantes ; les sous-questions sont liées.

On s'intéresse d'abord à des modèles déterministes discrets d'évolution d'une population. Dans chacun des modèles, une suite (v_n) modélise le nombre d'individus dans la population à la génération n. On dit qu'il y a extinction si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

1. Pour commencer, on propose le modèle suivant : chaque individu a un nombre de descendants $q > 0$, de telle sorte que
$$v_0 \in \mathbb{R}^+, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = q v_n.$$
Résoudre le modèle et donner une condition nécessaire et suffisante d'extinction.

2. On propose un nouveau modèle. On définit une suite (v_n) par :
$$v_0 \in \mathbb{R}^+, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} v_n \left(\frac{S - v_n}{S} \right),$$
où $S \in]0; +\infty[$ est une constante du problème.

   a) Déterminer une fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.
   Dresser le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}^+$.

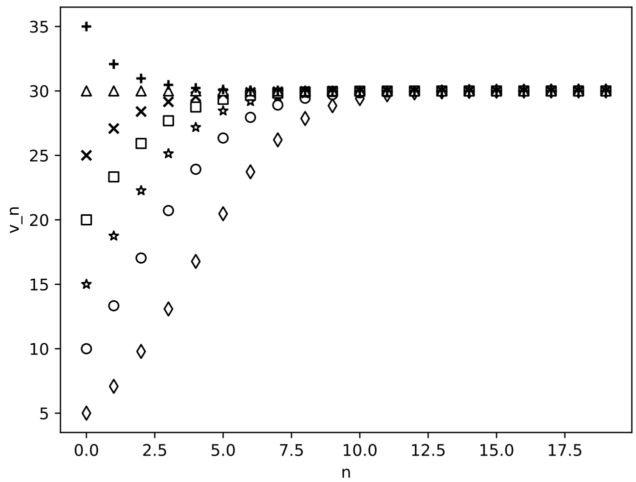
   b) Compléter le code suivant pour qu'il trace les 20 premiers termes de la suite.

```
S = 30
v0 = 5
L=[v0]
N=[0]
v=v0
for k in ## LIGNE A COMPLETER
    ## LIGNE A COMPLETER ##
    ## LIGNE A COMPLETER ##
    ## LIGNE A COMPLETER ##

plt.plot(N,L,'o')
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("v_n")
plt.show()
```

   c) Pour le tracé, on a utilisé le module `matplotlib.pyplot` sous l'alias `plt`. Comment importer le module ?

d) On trace sur la même figure l'évolution de v_n pour différentes valeurs de v_0. Cela donne les courbes suivantes (pour $S = 30$).



Conjecturer le comportement (variation et limite éventuelle) de la suite.

e) On suppose **dans cette question** que $v_0 \in]0; S]$. Montrer que (v_n) est croissante et majorée par S. En déduire qu'elle converge et donner sa limite.

3. On souhaite affiner le modèle en modifiant la fonction f. Désormais,

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} v_n \left(\frac{S - v_n}{S} \right) \left(\frac{v_n - A}{S} \right),$$

où $A \in]0; S[$ est fixé.

a) Identifier f.

b) Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[0; S]$.

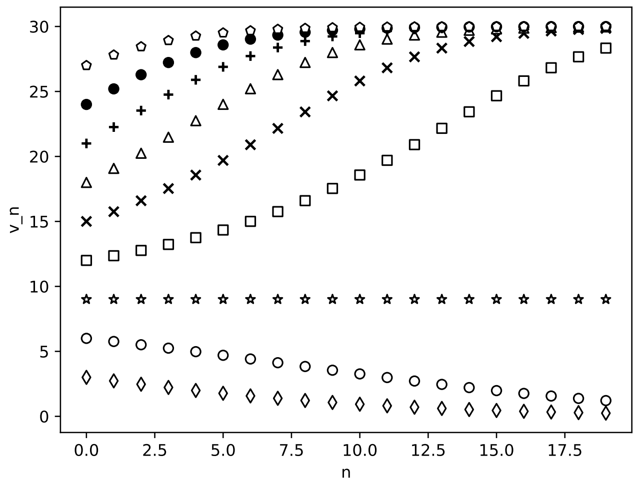
c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe représentative de f aux points d'abscisse 0, A et S.

d) On **admet** que f est une bijection strictement croissante de $[0; S]$ sur lui-même.

Sur un même graphique (échelle 1cm), tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0; S]$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.

Pour cette représentation graphique on prendra $S = 10$ et $A = 4$.

e) Un code analogue au précédent donne le tracé suivant pour les premiers termes de la suite (v_n) pour $S = 30$ et $A = 9$. On se restreint à $v_0 \in [0; S]$.



Conjecturer le comportement (variation et limite éventuelle) de la suite.

f) **Dans cette question** on suppose que $v_0 \in]0; A[$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in]0; A[$, puis que (v_n) est décroissante. En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.

g) Réaliser une étude analogue lorsque $v_0 \in]A; S[$. Que se passe-t-il si $v_0 = A$?

h) Donner une interprétation (en terme de dynamique de populations) des quantités A et S.

4. La version continue du modèle précédent est l'équation différentielle :

$$y'(t) = \frac{y(t)}{2}\left(\frac{S - y(t)}{S}\right)\left(\frac{y(t) - A}{S}\right),$$

et une condition initiale $y(0) \geqslant 0$.
En posant $F : x \mapsto \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{S - x}{S}\right)\left(\dfrac{x - A}{S}\right)$, l'équation différentielle peut se réécrire $y'(t) = F(y(t))$.

a) On appelle point d'équilibre de l'équation différentielle toute valeur x_0 telle que si $y(t) = x_0$ alors $y'(t) = 0$. Déterminer ces points d'équilibre.

b) On dit qu'un point d'équilibre x_0 est instable si $F'(x_0) > 0$ et stable si $F'(x_0) < 0$. Déterminer les points stables et instables parmi les points d'équilibre.

c) Si $y(0)$ est assez proche de x_0, y se comporte localement comme la solution de l'équation différentielle linéaire

$$y'(t) = F'(x_0)(y(t) - x_0).$$

Résoudre l'équation différentielle.

d) Justifier les dénominations d'équilibre stable et instable. Faire le lien avec les interprétations faites dans la question 3.

Problème B

Un modèle de croissance probabiliste pour une espèce est le modèle de Galton-Watson. On considère une population dont on va décrire l'évolution génération par génération. On appelle Z_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'individus à la génération n et on considère que :

— Les générations ne se superposent pas,

— Chaque individu a un nombre aléatoire de descendants : le nombre de descendants d'un individu est une variable aléatoire. Les variables aléatoires pour chacun sont indépendantes et de même loi.

On s'intéresse aux conditions sous lesquelles on a extinction ou survie de l'espèce. On dit que la lignée est éteinte à la génération n si $Z_n = 0$ et on souhaite étudier la suite de terme général $P(Z_n = 0)$.

Formellement, le modèle est donné par :

$$Z_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

où les variables aléatoires $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et **indépendantes** et **de même loi**. $X_{n,i}$ est le nombre de descendants de l'individu numéro i de la génération n.

Par exemple, si $Z_n = 12$ alors $Z_{n+1} = X_{n,1} + \ldots + X_{n,12}$. Z_{n+1} est la somme du nombre de descendants de chacun des 12 individus de la génération n.

On remarquera que comme $Z_0 = 1$, $Z_1 = X_{0,1}$ qui est le nombre de descendants de l'unique individu de la génération 0.

Partie A : Étude théorique

1. Que se passe-t-il si toutes les variables $X_{n,i}$ sont constantes égales à $q \in \mathbb{N}$?
2. **Un premier exemple.** Dans cette question, on suppose que le nombre de descendants de chaque individu suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$.

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = 0$ ou $Z_n = 1$ et que :
   $$P(Z_n = 1) = p^n.$$
   En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} P(Z_n = 0)$.
3. **Retour au cas général.** On définit la suite (u_n) par $u_n = P(Z_n = 0)$. Justifier que (u_n) est croissante puis qu'elle converge.

Dans la suite du sujet, on appelle la limite de (u_n) **la probabilité d'extinction de la lignée.**

4. **Étude complète dans un cas simple.** Dans cette question, la loi de reproduction est la suivante : chaque individu a la probabilité $p \in]0;1]$ de donner deux descendants, par exemple en se divisant, et $1-p$ de disparaitre sans descendant.
   a) Donner l'ensemble des valeurs prises par Z_1 ainsi que sa loi de probabilité. Calculer l'espérance $E(Z_1)$ et la variance $V(Z_1)$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$P(Z_{n+1} = 0) = (1-p)P_{[Z_1=0]}(Z_{n+1} = 0) + pP_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0).$$
   c) Justifier, avec une phrase, que $P_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0) = u_n^2$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_{n+1} = (1-p) + pu_n^2.$$
   d) En déduire que les deux limites possibles de (u_n) sont 1 et $\dfrac{1-p}{p}$.
   e) Montrer que si $p \leqslant \dfrac{1}{2}$, la probabilité d'extinction vaut 1.
   f) Si $p > \dfrac{1}{2}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n \leqslant \frac{1-p}{p} < 1.$$
   En déduire la valeur de la probabilité d'extinction.
   g) Tracer la probabilité d'extinction en fonction de $E(Z_1)$. Commenter le tracé obtenu.

Partie B : Simulations informatique

Dans cette partie, on s'intéresse à l'implémentation informatique du processus de Galton-Watson étudié précédemment.

```
1  def galton_watson(p,n):
2      population = np.zeros(n+1)
3      population[0] = 1
4      Z = 1
5      for i in range(1,n+1):
6          descendants = 0
7          for j in range(Z):
8              if rd.random()<p:
9                  descendants += 2
10         population[i] = descendants
11         Z = descendants
12         if descendants == 0:
13             return population
14     return population
```

5. a) À quoi correspondent les deux arguments de la fonction `galton_watson` ?

   b) À quoi servent les lignes suivantes ?

```
2      population = np.zeros(n+1)
```

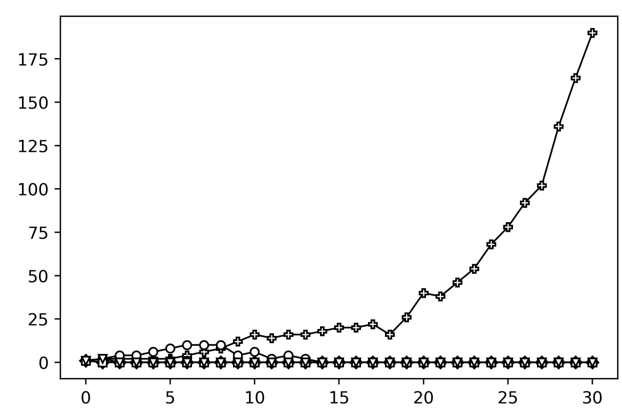
```
12 if descendants == 0:
13     return population
```

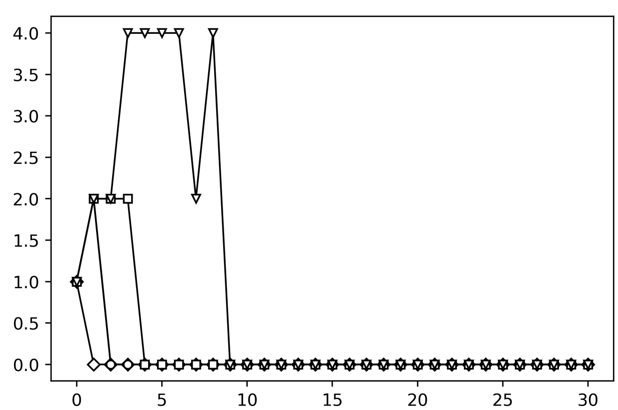
```
6  descendants=0
7  for j in range(Z):
8      if rd.random()<p:
9          descendants += 2
10 population[i] = descendants
```

   c) Pourquoi peut-on remplacer les lignes 7 à 9 par les lignes suivantes ?

```
1  population[i] = 2*rd.binomial(Z,p)
```

6. On a simulé puis représenté graphiquement l'évolution de 5 populations dans les cas $p = 0,4$ et $p = 0,6$. Associez chacun des graphiques suivants à une valeur de p, justifier rapidement en une phrase votre choix.





7. **Cette question est facultative !**

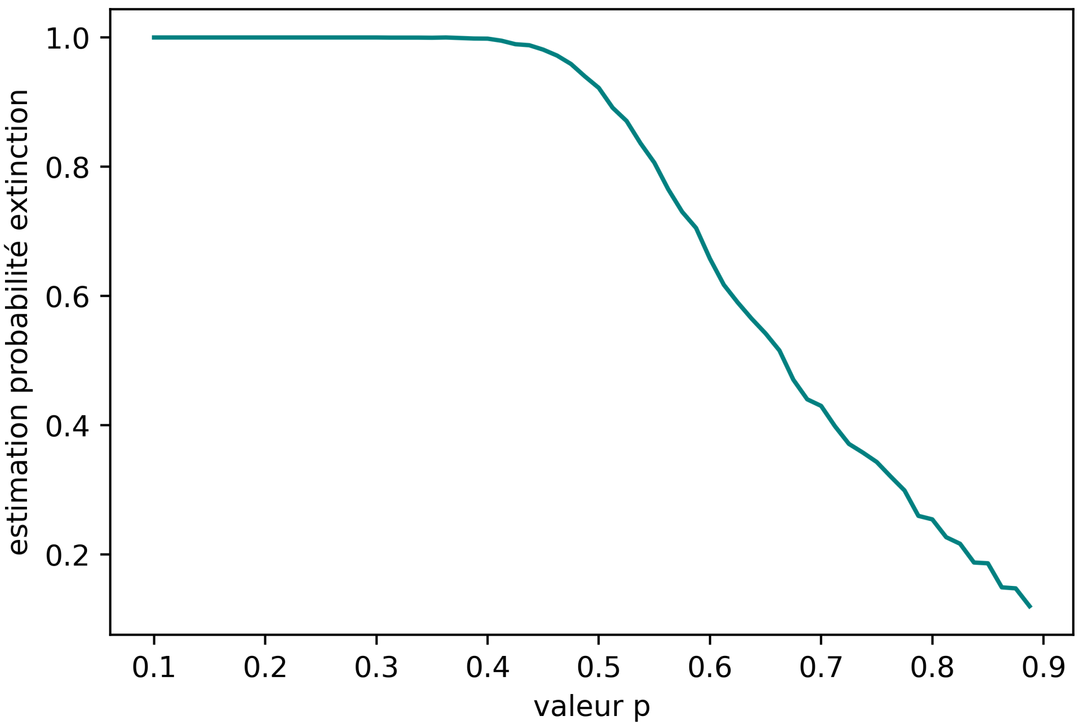
Dans cette question, on s'intéresse à la probabilité d'extinction.

a) Comment modifier la fonction `galton_watson` pour qu'elle renvoie 1 si la lignée est éteinte et 0 si la lignée n'est pas éteinte ?

Pour la suite on appelle la fonction ainsi modifiée : `galton_watson_2`.

b) Écrire une fonction `extinction`, qui prend en entrée un paramètre `p` et qui, à partir de 5000 simulations de Galton-Watson, renvoie une approximation de la probabilité d'extinction. (On s'arrêtera à 60 générations).

c) La simulation pour différentes valeurs de p donne le graphique suivant. (On a pris p entre 0,1 et 0,9 .) Commenter ce graphique en utilisant les résultats de la question 4



Annexe Python

Dans le module `matplotlib.pyplot` **importé sous l'alias** `plt` **:**

`plt.plot(X,Y,'o')` prend en entrée deux vecteurs ou deux listes de même taille, et réalise le tracé des points d'abscisses prises dans X et d'ordonnées prises dans Y.

On utilise `plt.show()` pour afficher le tracé.

Dans le module `numpy` **importé sous l'alias** `np` **:**

`np.zeros(n)` crée une matrice unidimensionnelle de n coefficients tous nuls.

Dans le module `numpy.random` **importé sous l'alias** `rd` **:**

`rd.random()` renvoie un flottant choisi « au hasard » entre 0 et 1.

`rd.binomial(n,p)` simule une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.