Espaces vectoriels

Table des matières

I Généralités sur les espaces vectoriels **2**
1 Définition . . . 2
2 Familles de vecteurs . . . 4
a Combinaisons linéaires, sous-espace engendré . . . 4
b Familles génératrices . . . 7
c Familles libres . . . 8

II Généralités sur les sous-espaces vectoriels **10**

III Dimension d'un espace vectoriel **12**
1 Bases . . . 12
2 Coordonnées d'un vecteur . . . 13
3 Dimension . . . 14
4 Propriétés importantes des espaces de dimension finie . . . 15
5 Matrices et famille de vecteurs . . . 17
6 Rang d'une famille de vecteurs . . . 19

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ sera égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. n et p désigneront deux entiers naturels non nuls.

I Généralités sur les espaces vectoriels

1 *Définition*

Définition 1

Soit E un ensemble muni d'une opération d'addition notée $+$ et d'une opération de multiplication par un élément de $\mathbb{K}$ notée $\cdot$.

On dit que $(E,+,\cdot)$ est un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** si, et seulement si :

— $(E,+)$ est un groupe commutatif, c'est-à-dire :
  * $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \in E^2$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \in E$; (Loi interne)
  * $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) \in E^3$, $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$; (Associativité)
  * $\exists \overrightarrow{e} \in E$ tel que $\forall \overrightarrow{u} \in E$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{e} = \overrightarrow{e}+\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$;
  * $\forall \overrightarrow{u} \in E$, $\exists \overrightarrow{v} \in E$, tel que $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}+\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e}$;
  * $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \in E^2$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$; (Commutativité)

— l'opération $\cdot$ vérifie :
  * $\forall\lambda \in \mathbb{K}$, et $\forall \overrightarrow{u} \in E$, $\lambda\cdot\overrightarrow{u} \in E$;
  * $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall \overrightarrow{u} \in E$, $\lambda\cdot(\mu\cdot\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\cdot\overrightarrow{u}$:
  * $\forall \overrightarrow{u} \in E$, $1\cdot\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$:
  * $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall \overrightarrow{u} \in E$, $(\lambda+\mu)\cdot\overrightarrow{u} = \lambda\cdot\overrightarrow{u}+\mu\cdot\overrightarrow{u}$; (Distributivité)
  * $\forall\lambda \in \mathbb{K}$, $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \in E^2$, $\lambda\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \lambda\cdot\overrightarrow{u}+\lambda\cdot\overrightarrow{v}$. (Distributivité)

Les éléments d'un espace vectoriel s'appellent des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent des **scalaires**.

Théorème - définition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

— Il existe un UNIQUE vecteur $\overrightarrow{e} \in E$ tel que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{e} = \overrightarrow{e}+\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
  Ce vecteur s'appelle le **vecteur nul de *E*** et on le note très souvent $\overrightarrow{0}_E$.

— Soit $\overrightarrow{u} \in E$. Il existe un UNIQUE vecteur $\overrightarrow{v}$ vérifiant $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}+\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E}$.
  Ce vecteur s'appelle **l'opposé de $\overrightarrow{u}$** et on le note $-\overrightarrow{u}$.

Démonstration :

— Supposons qu'il existe deux vecteurs $\overrightarrow{e}$ et $\overrightarrow{f}$ de E tels que, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$,

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{e} = \overrightarrow{e}+\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \ (1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u}+\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}+\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \ (2).$$

En utilisant la relation (1) en remplaçant $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{f}$, on obtient $\overrightarrow{f}+\overrightarrow{e} = \overrightarrow{f}$.
En utilisant la relation (2) en remplaçant $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{e}$, on obtient $\overrightarrow{f}+\overrightarrow{e} = \overrightarrow{e}$.
Donc $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{e}$.

— Soit $\overrightarrow{u} \in E$. Supposons qu'il existe deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de E tels que :

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}+\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u}+\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w}+\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\vec{v}+\vec{u}+\vec{w} &= (\vec{v}+\vec{u})+\vec{w}\\ &= \vec{0}_E+\vec{w}\\ &= \vec{w}\\ \text{et } \vec{v}+\vec{u}+\vec{w} &= \vec{v}+(\vec{u}+\vec{w})\\ &= \vec{v}+\vec{0}_E\\ &= \vec{v}\end{aligned}$$

Donc $\vec{v}=\vec{w}$.

□

Remarque :
Pour alléger les notations, on écrira : $\vec{u}+(-\vec{v})=\vec{u}-\vec{v}$.

Propriété 1
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\lambda\in\mathbb{K}$.
- $\lambda.\vec{0}_E=\vec{0}_E$ et $0.\vec{u}=\vec{0}_E$.
- $(-\lambda).\vec{u}=-(\lambda.\vec{u})$ et $\lambda.(-\vec{u})=-(\lambda.\vec{u})$.
- $\lambda.(\vec{u}-\vec{v})=\lambda.\vec{u}-\lambda.\vec{v}$.
- $\lambda.\vec{u}=\vec{0}_E \Leftrightarrow \lambda=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}_E$.

Démonstration :

- Soit $\lambda\in\mathbb{K}$:
$$\lambda.\vec{0}_E=\lambda.(\vec{0}_E+\vec{0}_E)=\lambda.\vec{0}_E+\lambda.\vec{0}_E.$$
Donc $\lambda.\vec{0}_E+\lambda.\vec{0}_E=\lambda.\vec{0}_E$ et en ajoutant de chaque côté l'opposé de $\lambda.\vec{0}_E$ on obtient que $\lambda.\vec{0}_E=\vec{0}_E$.
Soit $\vec{u}\in E$:
$$0.\vec{u}=(0+0).\vec{u}=0.\vec{u}+0.\vec{u}.$$
On ajoute alors de chaque côté $-0.\vec{u}$ et on obtient que $0.\vec{u}=\vec{0}_E$.
- Soit $\vec{u}\in E$:
$$\lambda.\vec{u}+(-\lambda).\vec{u}=(\lambda+(-\lambda)).\vec{u}=0.\vec{u}=\vec{0}_E.$$
Par unicité de l'opposé, on a bien $(-\lambda).\vec{u}=-(\lambda.\vec{u})$.
De même, $\lambda.\vec{u}+\lambda.(-\vec{u})=\lambda.(\vec{u}+(-\vec{u}))=\lambda.\vec{0}_E=\vec{0}_E$.
Donc $\lambda.(-\vec{u})=-(\lambda.\vec{u})$.
- Découle du point précédent et des règles de distributivité.
- $\underline{\Longleftarrow :}$ découle directement du premier point.
$\underline{\Longrightarrow :}$ Supposons que $\lambda.\vec{u}=\vec{0}_E$.
Si $\lambda\neq 0$ alors on a $\dfrac{1}{\lambda}.(\lambda.\vec{u})=\dfrac{1}{\lambda}.\vec{0}_E=\vec{0}_E$. De plus $\dfrac{1}{\lambda}.(\lambda.\vec{u})=\left(\dfrac{1}{\lambda}\times\lambda\right).\vec{u}=1.\vec{u}=\vec{u}$.
Donc $\vec{u}=\vec{0}_E$.
Ainsi on a $\lambda=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}_E$.

□

Remarques :

— Pour alléger les calculs on écrira $\lambda\overrightarrow{u}$ au lieu de $\lambda.\overrightarrow{u}$.

— En pratique, en BCPST, on utilise rarement cette définition pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel. Nous verrons comment répondre à ce genre de question dans la partie suivante. Cette définition vous sert surtout à comprendre quelles sont les opérations autorisées sur les éléments d'un espace vectoriel.

Théorème 2 : Les classiques

Les ensembles ci-dessous sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

Notation	Description
$\mathbb{K}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	ensemble des n-uplets de scalaires (notation : $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$)
$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	ensemble des matrices à n lignes et p colonnes
$\mathbb{K}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}_n[X]$ $(n \in \mathbb{N})$	ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n
$\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$ (ou $\mathbb{K}^I$)	ensemble des fonctions d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$
$\mathscr{F}(U, \mathbb{K})$	ensemble des fonctions de U (pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$) dans $\mathbb{K}$

Dans tout le chapitre E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et on dira souvent tout simplement E est un espace vectoriel.

2 Familles de vecteurs

a Combinaisons linéaires, sous-espace engendré

Définition 2

Soit $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E et $\overrightarrow{v}$ un vecteur de E. On dit que $\overrightarrow{v}$ est une **combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in I}$**, si, et seulement s'il existe une une famille $(\lambda_j)_{j\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que :

$$\overrightarrow{v} = \sum_{j\in I} \lambda_j \overrightarrow{u}_j.$$

Remarque :

Le choix des λ_j n'est pas forcément unique et ces scalaires peuvent être nuls.

Exemple 1 :

— La fonction $x \mapsto 3\cos(x) - 2\sin(x) + \mathrm{e}^x$ est une combinaison linéaire de la famille de fonctions $\mathscr{F} = (\cos, \sin, \exp)$. La fonction $x \mapsto (3\cos(x) - 2\sin(x))\mathrm{e}^x$ n'est pas une combinaison linéaire de la famille $\mathscr{F}$.

— Soit $(\overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\overrightarrow{u}_k$ est une combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$.

Ce que je dois savoir faire :

Je dois savoir déterminer si un vecteur donné est une combinaison linéaire d'une famille de vecteurs donnée :

Exemple 2 :

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice M est-elle une combinaison linéaire de la famille (A, B) ?

En d'autres termes on cherche à savoir si on peut trouver deux réels que pour l'instant nous allons noter a et b et qui vérifient : $M = aA + bB$

Or on a :

$$\begin{aligned} M = aA + bB &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 3a+2b \\ -a+5b & 2a+b \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ 3a+2b=4 \\ -a+5b=-7 \\ 2a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3+b \\ 5b+9=4 \\ 4b-3=-7 \\ 3b+6=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc on a $M = 2A - B$ et donc M est une combinaison linéaire de la famille (A, B). On remarque que le choix de a et b est ici unique mais ça n'est pas forcément le cas.

Définition 3

Soit $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p)$ une famille finie de vecteurs de E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles de cette famille est un sous-ensemble de E appelé **sous-espace engendré par la famille** $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p)$ et noté $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p)$. Autrement dit :

$$\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p) \underset{\text{def.}}{=} \left\{ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \overrightarrow{u}_j \ / \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}.$$

Ce que je dois savoir faire :

Il faut savoir exprimer un ensemble donné sous la forme $\mathrm{Vect}(\cdots)$.

Exemple 3 :

Considérons l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x-y \\ y & x+2y \end{pmatrix} /(x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. On voudrait écrire E comme l'ensemble des combinaisons linéaire d'une famille de matrices bien fixée. Il faut donc faire apparaitre « les paramètres » comme des coefficients de la combinaison linéaire :

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 2y \end{pmatrix} /(x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} /(x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Exemple 4 :

Considérons l'ensemble de polynômes : $F = \{aX^2 + (3a+2b)X - 2a - b/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Pour exprimer cette ensemble sous forme de sous-espace engendré, il faut faire apparaitre une combinaison linéaire où a et b sont les coefficients :

$$F = \{a(X^2 + 3X - 2) + b(2X - 1)/(a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(X^2 + 3X - 2, 2X - 1).$$

Propriété 2
Soit E un espace vectoriel et $(\overrightarrow{u}_1, \cdots, \overrightarrow{u}_p)$ une famille de E.
Si $\overrightarrow{u}_p$ est une combinaison linéaire de $(\overrightarrow{u}_1, \cdots, \overrightarrow{u}_{p-1})$ alors :

$$\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_1, \cdots, \overrightarrow{u}_p) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_1, \cdots, \overrightarrow{u}_{p-1}).$$

Démonstration :

On suppose donc que $\overrightarrow{u_p}$ est une combinaison linéaire de $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_{p-1}})$, c'est-à-dire qu'il existe $(a_1, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^{p-1}$ tel que : $\overrightarrow{u_p} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} a_i \overrightarrow{u_i}$.

Montrons l'égalité des deux ensembles par double inclusion.

— Soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$. Par définition d'un sous-espace engendré, il existe donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\overrightarrow{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{u_i}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{u_i} = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \overrightarrow{u_i} + \lambda_p \overrightarrow{u_p} &= \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \overrightarrow{u_i} + \lambda_p \left(\sum_{i=1}^{p-1} a_i \overrightarrow{u_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \underbrace{(\lambda_i + \lambda_p a_i)}_{\in \mathbb{K}} \overrightarrow{u_i}\end{aligned}$$

En conclusion, $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_{p-1}})$, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) \subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_{p-1}})$.

— Soit $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_{p-1}})$. Par définition d'un sous-espace engendré, il existe donc $(\mu_1, \ldots, \mu_{p-1}) \in \mathbb{K}^{p-1}$ tel que $\overrightarrow{y} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \mu_i \overrightarrow{u_i}$. En posant arbitrairement $\mu_p = 0$, on a alors

$$\overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \overrightarrow{u_i} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}).$$

Ainsi, $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_{p-1}}) \subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$.

En conclusion, $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_{p-1}})$.

$\square$

Remarques :

— Cette propriété est très importante et très utile en exercice.
— Pour avoir un énoncé simple, on énonce cette propriété avec le dernier vecteur de la famille mais cette propriété fonctionne dès qu'un vecteur de la famille est une combinaison linéaire des autres. (*Réfléchir comment la démonstration s'adapte !*)

Exemple 5 :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \right) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \right) \\ &\quad \text{car } \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \text{ est une comb. lin. de } \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right) \qquad \text{car } \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exemple 6 :

On peut écrire que $\text{Vect}(X+1, X-1, X) = \text{Vect}(X+1, X-1)$ car $X = \dfrac{1}{2}(X+1) + \dfrac{1}{2}(X-1)$.
On peut aussi écrire que $\text{Vect}(X+1, X-1, X) = \text{Vect}(X+1, X)$ car $X - 1 = (-1) \times (X+1) + 2 \times X$.

Propriété 3
Soit $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de E.

— Pour tout $(i,j) \in [\![1;p]\!]$ tel que $i < j$, on a

$$\text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_i}, \ldots, \overrightarrow{u_j}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) = \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_j}, \ldots, \overrightarrow{u_i}, \ldots, \overrightarrow{u_p}).$$

— Pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbb{K}^*)^p$, $\text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) = \text{Vect}(\lambda_1\overrightarrow{u_1}, \ldots, \lambda_p\overrightarrow{u_p})$.

Exemple 7 :

$$\begin{aligned}
\text{Vect}(1-X^2, 2X+2) &= \text{Vect}(X^2-1, X+1) \\
&\qquad \text{multiplication du premier vecteur par } -1 \text{ et du deuxième vecteur par } \frac{1}{2} \\
&= \text{Vect}(X+1, X^2-1) \qquad \text{changement de l'ordre.}
\end{aligned}$$

b Familles génératrices

Définition 4
Soit $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p)$ une famille finie de vecteurs de E.
On dit que la famille $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p)$ est **génératrice de $\boldsymbol{E}$**, ou encore **engendre $\boldsymbol{E}$**, si, et seulement si, on a $E = \text{Vect}\,(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p)$.

Remarque :

Autrement dit, la famille $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p)$ est génératrice de E si, et seulement si, tous les vecteurs de E peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p)$ et réciproquement toutes les combinaisons linéaires de la famille $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p)$ sont des éléments de E.

Ce que je dois savoir faire :

Je dois savoir trouver une famille génératrice d'un espace vectoriel E : il suffit pour cela d'écrire E sous la forme Vect(...) donc c'est exactement la même méthode que le point précédent.

Exemples 8 :

— Considérons l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x-y \\ y & x+2y \end{pmatrix} ; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
  On a vu dans l'exemple 3 que $E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$.
  Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de E.

— Dans l'exemple 4, on a vu que $F = \{aX^2 + (3a+2b)X - 2a - b / (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(X^2+3X-2, 2X-1)$.
  On peut donc dire que la famille $(X^2+3X-2, 2X-1)$ est génératrice de F.

— On remarque que $\mathbb{K}_n[X] = \{a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n / (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}\} = \text{Vect}(1, X, \ldots, X^n)$
  Donc la famille $(1, X, ..., X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

c Familles libres

Définition 5

- Une famille finie $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p})$ de vecteurs de E est dite **libre** si, et seulement si, pour tout p-uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ on a :
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0}_E \iff \lambda_1 = ... = \lambda_p = 0.$$
- Une famille finie $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p})$ de vecteurs de E est dite **liée** si, et seulement s'il existe un p-uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :
$$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0}_E.$$

Remarque :
Une famille qui n'est pas libre est liée.

Ce que je dois savoir faire :
Je dois savoir démontrer qu'une famille est libre ou liée en utilisant la définition.

Exemple 9 :
La famille $(1 + X + X^2, 3 + X + 5X^2, 2 + X + 3X^2)$ est-elle une famille libre ou liée de $\mathbb{R}[X]$?
On cherche tous les réels a, b, c vérifiant :

$$\begin{aligned}
&a(1 + X + X^2) + b(3 + X + 5X^2) + c(2 + X + 3X^2) = 0 \\
\Leftrightarrow &(a + 5b + 3c)X^2 + (a + b + c)X + (a + 3b + 2c) = 0 \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} a + 5b + 3c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a + 3b + 2c = 0 \end{cases} \\
&\text{car deux polynômes sont égaux ssi leurs coeff sont égaux,} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4b + 2c = 0 \\ 2b + c = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} a = b \\ c = -2b \end{cases}.
\end{aligned}$$

On voit donc qu'il y a une infinité de solutions pour a, b, c, en particulier $a = 1$, $b = 1$ et $c = -2$ est une solution non nulle donc la famille est liée.

On aurait pu voir de tête que $X^2 + X + 1 = (-1) \times (5X^2 + X + 3) + 2 \times (3X^2 + X + 2)$. Dans ce cas, aucun calcul nécessaire sur la copie, il suffit d'écrire cette relation et ensuite écrire « donc la famille est liée ».

Exemple 10 :
On considère la famille (f, g, h) composée de trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f : x \mapsto \sin(x) \qquad g : x \mapsto \cos(x) \qquad h : x \mapsto \sin(2x)$$

Montrons que cette famille est libre.
On cherche tous les réels a, b et c tels que :

$$\begin{aligned}
&a \times f + b \times g + c \times h = 0 \\
\Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\ f(x) + b\ g(x) + c\ h(x) = 0.
\end{aligned}$$

Méthode à retenir : *comme cette relation doit être valable pour tout réel x, elle doit en particulier être vraie pour certaines valeurs bien choisies de x.*

On a donc :

$$\begin{aligned}
a\times f+b\times g+c\times h=0 &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad a\ f(x)+b\ g(x)+c\ h(x)=0\\
&\Longrightarrow \begin{cases} a\times 0+b\times 1+c\times 0=0 & \text{en évaluant en } x=0\\ a\times 1+b\times 0+c\times 0=0 & \text{en évaluant en } x=\dfrac{\pi}{2}\\ a\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+b\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+c\times 1=0 & \text{en évaluant en } x=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\\
&\Longrightarrow \begin{cases} b=0\\ a=0\\ c=0\end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc montré que $a\ f+b\ g+c\ h=0\Longrightarrow a=b=c=0$.

La réciproque étant évidente on a donc montré que $a\ f+b\ g+c\ h=0\Longleftrightarrow a=b=c=0$. On peut affirmer que la famille (f,g,h) est libre.

Voici maintenant quelques propriétés des familles libres ou liées.

Propriété 4

Soit E un espace vectoriel.

- Si on change l'ordre des vecteurs d'une famille libre (resp. liée), on obtient encore une famille libre (resp. liée).
- Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.
- Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
- Toute famille contenant plusieurs fois le même vecteur est liée.
- Soit $\mathscr{F}$ une famille libre de E et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E.
  La famille $(\mathscr{F},\overrightarrow{u})$ est liée si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ est combinaison linéaire de la famille $\mathscr{F}$.

La propriété ci-dessous donne trois techniques très utiles en exercice pour montrer qu'une famille est libre.

Propriété 5

- Une famille contenant un seul vecteur est libre si, et seulement si, le vecteur est non nul.
- La famille $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ est liée si, et seulement s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u_1}=\lambda\overrightarrow{u_2}$ ou $\overrightarrow{u_2}=\lambda\overrightarrow{u_1}$. On dit alors que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont **colinéaires ou proportionnels**.
- Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés deux à deux distincts est libre.

Remarque :

On dit parfois qu'une famille de polynômes non nuls et de degrés deux à deux distincts est **échelonnée en degrés**.

Exemples 11 :

- La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car formée d'un seul vecteur non nul.
- La famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ car formée deux vecteurs visiblement non proportionnels.
- La famille $(1,X^5+2X^3,X^2+1,X^4)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$ c'est une famille de polynômes non nuls et de degrés deux à deux distincts.

II Généralités sur les sous-espaces vectoriels

Définition 6
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un ensemble. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si, et seulement si :
- F est un sous-ensemble de E,
- F est non vide,
- pour tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs de F et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est un vecteur de F.

Propriété 6
Si F est un sous-espace vectoriel de E alors F, muni des mêmes opérations que E, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété 7
Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $\overrightarrow{0}_E \in F$.

Démonstration :

Par définition, F n'est pas vide. Soit donc $\overrightarrow{u} \in F$.
Toujours par définition le vecteur $(-1)\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}$ appartient à F. Or $(-1)\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}_E$.
Donc $\overrightarrow{0}_E \in F$.

□

Propriété 8
Soit $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p})$ une famille finie de vecteurs de E. Alors le sous-espace engendré $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :

Notons $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p})$.
- F est constitué de toutes les combinaisons linéaires de la famille $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p})$ qui est formée d'éléments de E. Par définition d'un espace vectoriel on a donc $F \subset E$.
- On a $\overrightarrow{0}_E = 0\overrightarrow{u}_1 + \ldots + 0\overrightarrow{u}_p$, donc $\overrightarrow{0}_E \in F$ et ainsi F n'est pas vide.
- Soient $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux éléments de F. On peut donc écrire ces deux vecteurs sous la forme :

$$\overrightarrow{a} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{u}_i \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{b} = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \overrightarrow{u}_i,$$

  avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$.
  Soit $\delta \in \mathbb{K}$.
  On a alors $\delta\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (\delta\lambda_i + \mu_i)\overrightarrow{u}_i$.
  Donc $\delta\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ est une combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p})$ et appartient donc à F.

En conclusion, F est bien un sous-espace vectoriel de E.

□

Propriété 9
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des fonctions dérivables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ($k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Ce que je dois savoir faire :

Je dois savoir montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel donné ou classique.

Il existe deux principales méthodes :

— J'utilise la définition.

— J'écris mon ensemble sous la forme $\mathrm{Vect}(\cdots)$ et je conclus grâce à la propriété 8.

Exemple 12 :

Montrons que l'ensemble $E = \{aX^2 + 2aX + 3b/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Méthode 1 : (fonctionne tout le temps, mais un peu longue)

— On remarque que E est bien un sous ensemble de $\mathbb{R}[X]$.

— Il faut ensuite vérifier que E n'est pas vide. On remarque que $0 = 0X^2 + 2 \times 0 \times X + 3 \times 0$. Cela signifie que $0 \in E$ et donc que E n'est pas vide.

— On prend alors deux éléments quelconques de E :

$$P(X) = a_1X^2 + 2a_1X + 3b_1 \qquad Q(X) = a_2X^2 + 2a_2X + 3b_2$$

Puis on prend un réel α. Le but est de montrer que $\alpha P + Q$ est un élément de E :

$$\begin{aligned}\alpha P(X) + Q(X) &= \alpha(a_1X^2 + 2a_1X + 3b_1) + (a_2X^2 + 2a_2X + 3b_2)\\ &= \underbrace{(\alpha a_1 + a_2)}_{a_3} X^2 + 2\underbrace{(\alpha a_1 + a_2)}_{a_3} X + +3\underbrace{(\alpha b_1 + b_2)}_{b_3}\end{aligned}$$

Donc $\alpha P(X) + Q(X) \in E$

En conclusion E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Méthode 2 : (lorsqu'elle fonctionne elle est plus rapide)

$$E = \{a(X^2 + 2X) + b \times 3/(a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(X^2 + 2X, 3)$$

E est un sous-espace engendré par une famille d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ (on utilise ici la propriété 8).

Ce que je dois savoir faire :

Je dois savoir montrer qu'un ensemble E est un espace vectoriel :

On montre en fait que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel classique ou donné dans l'énoncé.

Exemple 13 :

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrons que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

Comme $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nous allons montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

— $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

— $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ n'est pas vide car la matrice nulle est une matrice symétrique donc elle appartient à $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.

— Soient A et B deux matrices de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On souhaite montrer que $\lambda A + B$ appartient à $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$:

$$(\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T = \lambda A + B$$

car A et B sont symétriques.

On a donc bien $\lambda A + B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.

En conclusion $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

Propriété 10

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Attention ce n'est en général pas vrai pour la réunion de deux sous-espaces.

Démonstration :

- Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $F \subset E$ et $G \subset E$ donc $F \cap G \subset E$.
- Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a $\overrightarrow{0}_E \in F$ et $\overrightarrow{0}_E \in G$.
  Donc $\overrightarrow{0}_E \in F \cap G$ et ainsi $F \cap G$ n'est pas vide.
- Soit $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux éléments de $F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Comme $\overrightarrow{a} \in F$, $\overrightarrow{b} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \in F$.
  Comme $\overrightarrow{a} \in G$, $\overrightarrow{b} \in G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \in G$. Ainsi, $\lambda\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \in F \cap G$.

En conclusion, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

□

Corollaire 1
L'intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque :
Ce résultat se démontre par récurrence en utilisant la propriété précédente.

III Dimension d'un espace vectoriel

1 Bases

Définition 7
Soit $\mathscr{F}$ une famille finie d'éléments de E.
On dit que $\mathscr{F}$ est une **base** de E si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est une famille à la fois libre et génératrice de E.

Ce que je dois savoir faire :
Je dois savoir trouver une base d'un espace vectoriel donné.

On commence par trouver une famille génératrice de E (*voir méthode sur les familles génératrices*), puis on montre que cette famille est libre. Enfin on conclut.

Exemple 14 :
Reprenons l'exemple 3 : $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x-y \\ y & x+2y \end{pmatrix} / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

On a vu que la famille $\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{B} \right)$ est génératrice de E.

Il faut alors montrer maintenant qu'elle est libre. Les matrices A et B ne sont visiblement pas proportionnelles donc la famille (A, B) est libre. **(ATTENTION cette méthode ne fonctionne que pour les familles de deux vecteurs)**

Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$ est libre et génératrice de E, c'est donc une base de E.

Exemple 15 :
Déterminons une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$, on note E_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne qui vaut 1.

On remarque alors que $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1p}, E_{21}, \ldots, E_{2p}, \ldots, E_{n1}, \ldots, E_{np})$.

De plus la famille $(E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1p}, E_{21}, \ldots, E_{2p}, \ldots, E_{n1}, \ldots, E_{np})$ est libre (facile à montrer).

Donc la famille $(E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1p}, E_{21}, \ldots, E_{2p}, \ldots, E_{n1}, \ldots, E_{np})$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque :

Dans certains des espaces vectoriels classiques certaines bases « apparaissent comme des évidences ». Ces bases s'appellent des bases canoniques et elles sont à connaitre par cœur.

Théorème 3 : Bases canoniques

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $e_i = (0, ..., 0 \underbrace{, 1 ,}_{i\text{ème place}} 0, ..., 0)$.

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

2 *Coordonnées d'un vecteur*

Théorème - définition 4

La famille $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est une base de E si, et seulement si, tout vecteur de E peut s'écrire, de manière unique, comme une combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$. Les coefficients de cette combinaison linéaire s'appellent les **coordonnées** du vecteur dans la base $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$.

Définition 8

Soit E un espace vectoriel et soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ une base de E.
Soit $\overrightarrow{u} \in E$, on considère $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathscr{B}$.

On note alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u})$ est appelée la **matrice colonne des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathscr{B}$.**

Ce que je dois savoir faire :

Je dois savoir trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée.

Pour « trouver les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$ » il faut trouver les scalaires $(a_i)_{i\in I}$ tels que :

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i\in I} a_i \overrightarrow{e_i}.$$

C'est donc exactement la même méthode que pour savoir si $\overrightarrow{u}$ est une combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$.

La matrice colonne des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathscr{B}$ se note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u})$ et elle est égale à $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Exemple 16 :

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $\mathscr{B} = (R_0, R_1, R_2)$ où $R_0 = 1$, $R_1 = X + 2$ et $R_2 = X^2 - 2$.

On considère le polynôme $P = 4X^2 - 3X - 12$. Quelle est la matrice colonne des coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$?

On doit ici chercher les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire que l'on cherche les réels a, b et c tels que :

$$P = aR_0 + bR_1 + cR_2 \Leftrightarrow 4X^2 - 3X - 12 = a + b(X + 2) + c(X^2 - 2)$$
$$\Leftrightarrow 4X^2 - 3X - 12 = cX^2 + bX + a + 2b - 2c \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ b = -3 \\ a + 2b - 2c = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ b = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

Donc on a $P = 2R_0 - 3R_1 + 4R_2$ et ainsi la matrice colonne des coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$ est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Remarque :

Il existe une situation dans laquelle trouver les coordonnées d'un vecteur ne nécessite aucun calcul : lorsque l'on cherche les coordonnée dans une base canonique.

Par exemple les coordonnées du polynôme P précédent dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ sont $\begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3 Dimension

Définition 9

On dit que E est un espace vectoriel de **dimension finie** s'il existe une famille génératrice finie.
Un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie est dit de **dimension infinie**.

Exemple 17 :

Montrons que $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Supposons que $\mathbb{K}[X]$ est de dimension finie. Alors il existe $(P_1, \ldots, P_k)$ une famille génératrice finie de $\mathbb{K}[X]$.

On note alors $m = \max(\deg(P_i), 1 \leqslant i \leqslant k)$.

D'après les propriétés des polynômes, il est alors impossible de trouver $(a_1, \ldots, a_k)$ tels que :

$$X^{m+1} = \sum_{i=1}^{k} a_i P_i, \qquad \text{car } \deg(X^{m+1}) > \deg\left(\sum_{i=1}^{k} a_i P_i\right).$$

Ceci est absurde car $X^{m+1} \in \mathbb{K}[X]$ et on a supposé que $(P_1, \ldots, P_k)$ est génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

Ainsi $\mathbb{K}[X]$ n'admet pas de famille génératrice finie et donc est de dimension infinie.

Théorème 5

Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{\overrightarrow{0}_E\}$.
Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice finie de E, alors il existe une sous-famille de $\mathscr{F}$ qui est libre et génératrice de E, c'est-à-dire une base de E.

Remarques :

— Ce théorème est une conséquence de la propriété 2.
— Ce théorème signifie que tout espace vectoriel non réduit à $\{\overrightarrow{0}_E\}$ de dimension finie admet des bases.

Théorème - définition 6

Soit E un espace de dimension finie non réduit à $\{\overrightarrow{0}_E\}$.
Alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre entier est appelé **dimension de l'espace vectoriel *E*** et est noté $\dim(E)$.
Par convention on dira que l'espace $\{\overrightarrow{0}_E\}$ est de dimension 0.

Remarque :

Résultat admis.

Théorème 7 : Dimensions des espaces vectoriels de référence

— $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
— $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$.

ATTENTION la dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est **HORS PROGRAMME**.

Ce que je dois savoir faire :

Je dois savoir trouver la dimension d'un espace vectoriel.

— S'il s'agit d'un espace vectoriel classique, on récite son cours (théorème 7) ;

— Sinon **LA SEULE MÉTHODE** possible (à ce stade du cours) consiste à trouver une base $\mathscr{B}$ **puis** compter le nombre de vecteurs dans la base. Ce nombre est la dimension cherchée. On pourra écrire $\dim(E) = \text{card}(\mathscr{B}) = ...$

Exemple 18 :

Déterminons la dimension de l'espace vectoriel $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$.

E n'est pas un espace vectoriel classique donc on ne connait pas sa dimension. La seule façon de trouver cette dimension est de trouver une base de E.

On remarque tout d'abord que : $E = \{(0, y, 3y)/y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0, 1, 3))$.

Donc la famille $((0, 1, 3))$ est une famille génératrice de E.

De plus cette famille ne contient qu'un seul vecteur et ce vecteur n'est pas nul. Donc la famille $\mathscr{B} = ((0, 1, 3))$ est libre.

Ainsi $\mathscr{B} = ((0, 1, 3))$ est une base de E et on a $\dim(E) = \text{card}(\mathscr{B}) = 1$.

Exemples 19 :

— Reprenons l'exemple 14 : $\dim(E) = \text{card}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = 2$.

— Reprenons l'exemple 15 : $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = \text{card}(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1p}, E_{21}, \dots, E_{2p}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{np}) = n \times p$.

4 Propriétés importantes des espaces de dimension finie

Propriété 11

Soit E un espace de dimension finie n.

— Si $\mathscr{F}$ est une famille libre de E alors $\text{card}(\mathscr{F}) \leqslant n$.

— Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E alors $\text{card}(\mathscr{F}) \geqslant n$.

Conséquences :

— Dans un espace de dimension n, toute famille de strictement plus de n vecteurs est donc forcément liée.

— Dans un espace de dimension n, toute famille de strictement moins de n vecteurs n'est jamais génératrice.

Théorème 8

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace de E.

Alors F est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

De plus $\dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow F = E$.

Démonstration :

Si $F = \{\overrightarrow{0}_E\}$ alors on a $\dim F = 0$ et donc $\dim F \leqslant \dim E$.

On suppose maintenant que $F \neq \{\overrightarrow{0}_E\}$. Toute famille libre de F est aussi libre dans E. Comme E est de dimension n une famille libre de E ne peut pas avoir plus de n vecteurs. Donc toutes les familles libres de F ont moins de n vecteurs. Notons p le plus grand cardinal de toutes les familles libres de F et $(\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_p)$ une famille libre de F de cardinal maximal. D'après ce qu'on vient de dire $p \leqslant n$.

Montrons maintenant que la famille $(\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_p)$ est une base de F.

Soit $\overrightarrow{x} \in F$. Comme p est le plus grand cardinal des familles libres de F, la famille $(\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_p, \overrightarrow{x})$, qui est de cardinal $p+1$, est liée dans F. Donc il existe $(\alpha_1, ..., \alpha_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1}$, $(\alpha_1, ..., \alpha_{p+1}) \neq (0, ..., 0)$, tels que $\alpha_1 \overrightarrow{e}_1 + ... + \alpha_p \overrightarrow{e}_p + \alpha_{p+1} \overrightarrow{x} = 0$.

On a forcément $\alpha_{p+1} \neq 0$ car sinon la famille $(\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_p)$ serait liée. Donc $\overrightarrow{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{-\alpha_i}{\alpha_{p+1}} \overrightarrow{e}_i$.

Donc la famille est bien génératrice de F et donc une base de F. Ainsi F est bien de dimension finie et $p = \dim F \leqslant \dim E$.

De plus si $\dim F = \dim E$ (donc $n = p$) la famille $(\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ est à la fois une base de F et de E et donc $E = F$. Réciproquement si $E = F$, alors $\dim E = \dim F$.

□

Propriété 12

Soit E un espace de dimension finie $n \neq 0$ et $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de E.
- Si $\mathscr{F}$ est libre et $\mathrm{card}(\mathscr{F}) = n$ alors $\mathscr{F}$ est une base de E.
- Si $\mathscr{F}$ est génératrice et $\mathrm{card}(\mathscr{F}) = n$ alors $\mathscr{F}$ est une base de E.

Démonstration :

Démontrons uniquement le premier point.

On dispose donc d'un espace vectoriel E de dimension $n \neq 0$ et d'une famille $\mathscr{F}$ de n vecteurs de E que l'on suppose libre.

On pose alors $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. La famille $\mathscr{F}$ est libre et génératrice de F donc c'est une base de F. Ainsi, F est de dimension finie et $\dim(F) = \mathrm{card}(\mathscr{F}) = n$.

De plus, F étant un sous-espace engendré par une famille de vecteurs de E, F est un sous-espace vectoriel de E.

En résumé, F est un sous-espace vectoriel de E et $\dim(F) = \dim(E)$. Donc, d'après le théorème précédent, $E = F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

La famille $\mathscr{F}$ est donc une base de E.

□

Conséquences :

On tire de cette propriété deux nouvelles méthodes **TRÈS IMPORTANTES** pour montrer qu'une famille donnée est une base d'un espace vectoriel donné.

Ce que je dois savoir faire :

Je dois savoir répondre à la question « Montrer que la famille $\mathscr{B}$ (*donnée*) est une base de l'espace vectoriel E (*donné*) ». Vous disposez de deux méthodes :

Méthode 1 : *s'applique lorsqu'on ne **connait pas** la dimension de E.*

On montre que la famille $\mathscr{B}$ est libre et génératrice de E.

Méthode 2 : *s'applique lorsqu'on **connait**, avant de commencer la question, la dimension de E.*

On montre que $\mathscr{B}$ est une famille libre (ou génératrice) de E puis on dit « la famille $\mathscr{B}$ est une famille libre (resp. génératrice) de E et $\mathrm{card}(\mathscr{B}) = ... = \dim(E)$ (*... à remplacer par un chiffre en exercice*) donc $\mathscr{B}$ est une base de E ».

Exemple 20 :

Montrons que la famille $\mathscr{B} = ((0,2,-5),(1,0,4),(1,-1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On remarque tout de suite que l'on connait la dimension de $\mathbb{R}^3$ donc on va appliquer la méthode 2.

Commençons par montrer que la famille $\mathscr{B}$ est libre :

Je cherche tous les réels a, b, c vérifiant :

$$a(0,2,-5) + b(1,0,4) + c(1,-1,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow (b+c, 2a-c, -5a+4b) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ 2a-c=0 \\ -5a+4b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-c=-2a \\ c=2a \\ -13a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0$$

La famille $\mathscr{B}$ est donc libre.

De plus $\mathrm{card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 9 : Théorème de la base incomplète
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille libre de E.
Alors on peut compléter cette famille en une base de E, c'est-à-dire qu'il existe $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_{n-p}})$ des vecteurs de E tels que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_{n-p}})$ est une base de E.

Remarque :
Théorème admis. En BCPST, les exercices doivent vous guider pour compléter une famille libre en une base.

5 *Matrices et famille de vecteurs*

Définition 10
Soit E un espace vectoriel et soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ une base de E.
On considère une famille $\mathscr{F} = (\overrightarrow{w}_1, \dots \overrightarrow{w}_p)$ de vecteurs de E.
On appelle **matrice des coordonnées de la famille $(\overrightarrow{w}_1, \dots \overrightarrow{w}_p)$ dans la base** $\mathscr{B}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne contient les coordonnées de $\overrightarrow{w}_j$ dans la base $\mathscr{B}$.
On note cette matrice $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

Propriété 13
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \neq 0$. Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ une base de E et $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.
- $\mathscr{F}$ est libre si, et seulement si, $\text{rg}(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})) = \text{card}(\mathscr{F})$.
- $\mathscr{F}$ une base de E si, et seulement si, la matrice $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est inversible.

Remarque :
Cela donne une nouvelle méthode pour montrer qu'une famille donnée est une famille libre ou est une base d'un espace vectoriel donné dont on connait déjà une base.
Cette méthode est très adaptée aux espaces de références $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$ car on utilise leur base canonique.

Exemple 21 :
On considère les vecteurs de $\mathbb{C}^3$ suivants :

$$\vec{u} = (1, 2\mathrm{i}, \mathrm{i}+1) \qquad \vec{v} = (1, 0, 2) \qquad \vec{w} = (0, -\mathrm{i}, 3\mathrm{i})$$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle une base de $\mathbb{C}^3$?
Notons $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
\text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\right) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i}+1 & 2 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix}\right) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & 1-\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \end{pmatrix}\right) \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2\mathrm{i}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (\mathrm{i}+1)L_1 \end{matrix} \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \\ 0 & 3\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}\right) \qquad C_2 \leftrightarrow C_3 \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1-7\mathrm{i} \end{pmatrix}\right) \qquad L_2 \leftarrow 3L_2 + L_3 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Donc $\text{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et $\text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\right) = 3$, ce qui signifie que $\text{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est inversible. Ainsi, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

Exemple 22 :
Soit $P_1 = X^4 + X^2 + 1$, $P_2 = X^3 + X$ et $P_3 = 5X^4 + 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1$.
La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle une famille libre de $\mathbb{R}_4[X]$?

Notons $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$. On obtient aisément que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(P_1, P_2, P_3)\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_1 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right) && L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2L_3 \end{array} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(P_1, P_2, P_3)\right) = \mathrm{card}(P_1, P_2, P_3)$ donc (P_1, P_2, P_3) est une famille libre.

Définition 11
Soient $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ et $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$**, et on note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, la matrice des coordonnées de la famille $(\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$ dans la base $\mathscr{B}$.

Ce que je dois savoir faire :
Je dois savoir construire la matrice de passage entre deux bases.
Si $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ sont deux bases alors pour construire la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ je mets dans la $j^{\text{ème}}$ colonne les coordonnées du vecteur f_j dans la bases $\mathscr{B}$.

Exemple 23 :
Soient $\mathscr{B}_1 = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, et $\mathscr{B}_2 = (R_0, R_1, R_2, R_3)$, avec $R_0 = 1$, $R_1 = X - 1$, $R_2 = (X-1)^2$, $R_3 = (X-1)^3$ une autre base de cet espace. Déterminons la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$.
La première colonne de $P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}$ contient les coordonnées de R_0 dans la base $\mathscr{B}_1$.
On cherche donc des réels a, b, c et d tels que $R_0 = aP_0 + bP_1 + cP_2 + dP_3$.
On trouve facilement, de tête, $R_0 = 1 \times P_0 + 0P_1 + 0P_2 + 0P_3$.

De même on peut trouver de tête :

$$R_1 = -1 + X = -P_0 + P_1 + 0P_2 + 0P_3$$
$$R_2 = 1 - 2X + X^2 = P_0 - 2P_1 + P_2 + 0P_3$$
$$R_3 = -1 + 3X - 3X^2 + X^3 = -P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3$$

On en déduit que $P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 24 :
On considère les vecteurs suivants :

$$u = (1,1,0) \qquad v = (0,1,1) \qquad w = (1,0,1)$$
$$x = (1,1,1) \qquad y = (2,1,1) \qquad z = (0,1,0).$$

On admet que $\mathscr{B}_1 = (u, v, w)$ et $\mathscr{B}_2 = (x, y, z)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^3$. Déterminons la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$.

On a :

$$x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w \qquad y = u + w \qquad z = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}w.$$

Pour trouver les coefficients devant u, v et w deux méthodes : soit vous les trouvez de tête, soit vous cherchez a, b et c tels que $x = au + bv + cw$, puis pour y et enfin pour z.

Donc $P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Propriété 14
Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est une matrice inversible et $P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$

Théorème 10 : Formule de changement de base pour les coordonnées d'un vecteur
On considère $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de l'espace vectoriel E et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}) = P \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{u})$$

6 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 12
Soit $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle **rang de cette famille**, et on note $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$, la dimension de l'espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$.

Propriété 15
Soit $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie et soit $\mathscr{B}$ une base de E.
Le rang de la famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ est égal au rang de la matrice des coordonnées de cette famille dans la base $\mathscr{B}$.

Ce que je dois savoir faire :

Je dois savoir déterminer le rang d'une famille de vecteurs. Deux méthodes ici :

— On peut poser $F = \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ et calculer la dimension de F.

— **Dans un espace de dimension finie**, on peut déterminer le rang de la matrice des coordonnées de la famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ dans une base.

Exemple 25 :

On pose $P = 2X + 1$, $Q = X^2 + 1$ et $R = 2X^2 + 2X + 3$.

Quel est le rang de la famille (P, Q, R) de $\mathbb{R}[X]$?

— Méthode 1 : On pose $F = \text{Vect}(P, Q, R)$. Nous devons donc calculer la dimension de F et le seul moyen de calculer cette dimension est de trouver une base de F.
Par définition de F, la famille (P, Q, R) est une famille génératrice de F.
Cette famille est-elle libre ?
On voit que $R = 2Q + P$ donc la famille (P, Q, R) est liée. *(Si on ne « voit » pas, on peut toujours chercher tous les réels a, b et c tels que : $aP + bQ + cR = 0$.)*
Comme R est une combinaison linéaire de (P, Q), on a $F = \text{Vect}(P, Q)$.
La famille (P, Q) est donc génératrice de F. De plus c'est une famille de polynômes échelonnée en degrés donc cette famille est libre.
Ainsi (P, Q) est une base de F, donc $\dim(F) = 2$ et donc $\text{rg}(P, Q, R) = 2$.

— Méthode 2 :
Notons $\mathscr{B}_c = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
On a alors $\text{Mat}_{\mathscr{B}_c}(P, Q, R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculons le rang de cette matrice :

$$\begin{aligned}
\text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) && L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) && L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

On a donc $\text{rg}(P, Q, R) = \text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}_c}(P, Q, R)\right) = 2$.

Propriété 16

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

— $\mathscr{F}$ est libre si, et seulement si, $\text{rg}(\mathscr{F}) = \text{card}(\mathscr{F})$.

— Si E est de dimension finie alors $\mathscr{F}$ est une base de E si, et seulement si, $\text{rg}(\mathscr{F}) = \text{card}(\mathscr{F}) = \dim(E)$.

Remarque :

C'est tout simplement une reformulation de la propriété 13.