Le sujet comprend 4 pages numérotées de 1 à 4. Il porte sur deux modèles d'épidémiologie. Il comporte deux parties indépendantes (a l'exception des questions 4 et 10.b).

Il est recommandé de lire attentivement et patiemment le sujet. Il est demandé de veiller au soin de la présentation, ainsi qu'à la rigueur et à la concision des raisonnements.

Début de l'épreuve

Première partie : Un modèle probabiliste pour la propagation des épidémies

On considère un modèle probabiliste pour représenter une épidémie. Soit $(X_{n,k})_{n,k}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, à valeur dans $\mathbb{N}$, indexée par deux entiers $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

On suppose que toutes ces variables aléatoires ont une même loi de référence X admettant une espérance. Soit $(Z_n)_n$ le nombre de personnes infectées lors de la n-ième semaine. On suppose que chacune des Z_n personnes infectées à la semaine n contamine à son tour un nombre aléatoire de personnes, respectivement $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,Z_n}$ lors de la semaine suivante. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}$$

On suppose $Z_0 = 1$, c'est-à-dire que l'épidémie démarre avec un unique patient zéro. On note

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k := \mathbb{P}(X = k) \text{ et } m := \mathbb{E}(X).$$

On fait l'hypothèse que

$$p_0 > 0, \quad p_0 + p_1 < 1.$$

Enfin, on définit

$$\forall\ 0 < t \leqslant 1, \quad \phi(t) := \mathbb{E}\left(t^X\right).$$

1) **a)** Montrer que

$$\forall\ 0 < t \leqslant 1, \quad \phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k.$$

On admettra que ϕ est continue sur $[0, 1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$ et que

$$\forall\ 0 < t \leqslant 1, \quad \phi'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k t^{k-1}.$$

b) Montrer que ϕ est croissante, que $\phi(0) = p_0$, que $\phi(1) = 1$ et que $\phi'(1) = \mathbb{E}(X) = m$.
Soit $\phi_n(t) := \mathbb{E}\left(t^{Z_n}\right)$ pour tout $t \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

2) **a)** Montrer que

$$\forall\ 0 < t \leqslant 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+1}(t) = \mathbb{P}(Z_n = 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = j)\, \mathbb{E}\left(t^{\sum_{k=1}^{j} X_{n,k}}\right).$$

b) Montrer que

$$\forall\ 0 < t \leqslant 1, \quad \phi_{n+1}(t) = \phi_n(\phi(t))$$

et que

$$\forall 0 < t \leqslant 1, \quad \phi_n(t) = \phi \circ \ldots \circ \phi(t)$$

(c'est-à-dire qu'on compose n fois la fonction ϕ pour obtenir ϕ_n).

c) Montrer que $\mathbb{E}\left(Z_{n+1}\right) = m\mathbb{E}\left(Z_n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que $\mathbb{E}\left(Z_n\right) = m^n$.

On définit

$$\tau := \inf\left\{n \geqslant 0 \mid Z_n = 0\right\},$$

cette quantité pouvant éventuellement valoir $+\infty$, et

$$\xi := \mathbb{P}(\tau < +\infty).$$

3) **a)** Expliquer pourquoi ξ est la probabilité d'extinction de l'épidémie.

b) Montrer que $\mathbb{P}\left(Z_{n+1} = 0\right) \geqslant \mathbb{P}\left(Z_n = 0\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\xi = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = 0\right)$ (on pourra pour cela remarquer que les évènements $C_n := \{Z_n = 0 \text{ et } Z_{n-1} \neq 0\}$ sont deux à deux incompatibles).

c) Calculer $\phi_n(0)$ et montrer que $\phi(\xi) = \xi$.

d) Montrer que si $\zeta \in [0, 1]$ est un autre point fixe de ϕ, alors $\phi_n(0) \leqslant \zeta$ pour tout n.

e) En déduire que $\xi \leqslant \zeta$, puis que $\xi = \min\{x \in [0, 1] \mid \phi(x) = x\}$ et expliquer pourquoi cette quantité est bien un minimum.

On admettra que ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1[$ et que

$$\forall\ 0 < t < 1, \quad \phi''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k t^{k-2}$$

4) **a)** Montrer que $\phi''(t) > 0$ sur $]0, 1[$.

b) En déduire que $\phi(t) > m(t-1) + 1$ pour tout $t \in]0, 1[$.

c) Montrer que $\xi = 1$ si $m \leqslant 1$.

d) Si $m > 1$, montrer que $\xi < 1$. On pourra pour cela étudier le signe de $\phi(x) - x$ aux voisinages de 0^+ et de 1^-.

On note pour deux entiers naturels $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$: $\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!)$. Par convention, $0! = 1$ et $C_n^k = 0$ si $k > n$.

5) On suppose que X suit une loi binomiale : $p_k = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, n$, avec $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $q \in (0, 1)$. Calculer ϕ dans ce cas. Calculer ξ en fonction de q dans le cas $n = 2$.

6) **a)** Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} x^{k-n}.$$

b) On suppose que X suit une loi binomiale négative, définie par : $p_k = \binom{k+n-1}{k}(1-q)^n q^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $q \in (0, 1)$. Calculer ϕ dans ce cas. En déduire m.

c) On suppose de plus que $n = 2$. Montrer que

$$(1-q)^2 = \xi(1-q\xi)^2.$$

En remarquant que 1 est solution de cette équation, montrer que ξ est solution d'une équation polynomiale d'ordre 2. En déduire ξ en fonction de q en distinguant les cas.

Deuxième partie : Un modèle déterministe pour la propagation des épidémies

On considère maintenant le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t), \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ R'(t) = \gamma I(t), \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = 0. \end{cases}$$

Ici, β, γ, S_0 et I_0 sont des réels strictement positifs.

On admettra qu'il existe une solution $(S(t), I(t), R(t))$ pour tous les temps $t \geqslant 0$.

7) Si $S(t)$ représente le nombre de personnes n'ayant pas encore contracté la maladie, $I(t)$ le nombre de personnes infectées et $R(t)$ le nombre de personnes guéries et désormais immunisées contre la maladie au temps t, expliquer brièvement en quoi ce système est pertinent pour décrire la propagation d'une épidémie et sous quelles hypothèses il est pertinent. Expliquer pourquoi, sous ces hypothèses, $1/\gamma$ peut-être interprété comme la période de contagiosité de chaque individu infecté.

8) **a)** Exprimer $S(t)$ en fonction de S_0, β et $\int_0^t I(s)\mathrm{d}s$. En déduire que $S(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

b) De même, montrer que $I(t) > 0$ pour tout $t > 0$. En déduire que $R(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

c) Montrer que $S + I + R$ ne dépend pas du temps. En déduire que ces quantités sont toutes bornées.

d) Montrer que S et R convergent quand $t \to +\infty$, vers des quantités qu'on notera respectivement S_∞ et R_∞. En déduire que I converge quand $t \to +\infty$, vers une quantité qu'on notera I_∞.

9) **a)** Supposons que $S_\infty \geqslant \gamma/\beta$. Montrer qu'alors I est croissante et en déduire une contradiction.

b) Montrer que $I_\infty = 0$.

c) Tracer les tableaux de variations de S, I et R. On distinguera les cas $\beta S_0/\gamma \leqslant 1$ et $\beta S_0/\gamma > 1$.

10) **a)** Montrer que l'épidémie se propage, c'est-à-dire que le maximum de $t \mapsto I(t)$ sera strictement plus grand que I_0, si et seulement si $\beta S_0/\gamma > 1$.

b) Comparer ce critère à celui obtenu question 4.

11) Montrer que $\ln S - \frac{\beta}{\gamma}(S + I)$ ne dépend pas du temps.

12) **a)** En déduire une relation sur S_∞, S_0, I_0, β et γ.

b) En déduire que, si l'on considère S_∞ comme une fonction de I_0, alors S_∞ est strictement décroissante en I_0. Cela vous parait-il logique ?

13) **a)** À l'aide de la relation déduite à la question 11, calculer le maximum de $t \mapsto I(t)$ en fonction de β, γ, I_0 et S_0, dans le cas où $\beta S_0/\gamma > 1$.

b) On suppose que $\beta S_0/\gamma = 4$, que $S_0 = 7 \times 10^7$ et que $I_0 = 1$. À l'aide de la relation $\ln 4 \simeq 1,4$, calculer une approximation du maximum de $t \mapsto I(t)/S_0$.

On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t), \\ E'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha E(t), \\ I'(t) = \alpha E(t) - \gamma I(t), \\ R'(t) = \gamma I(t), \\ S(0) = S_0, \quad E(0) = 0, \qquad I(0) = I_0, \quad R(0) = 0. \end{cases}$$

Ici, α, β, γ, S_0 et I_0 sont des réels strictement positifs.
On admettra qu'il existe une solution $(S(t), E(t), I(t), R(t))$ pour tous les temps $t \geqslant 0$. On admettra également que $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ restent strictement positifs pour tous les temps $t > 0$.

14) **a)** Comment interpréter la quantité $E(t)$?

b) Étudier cette équation (on pourra commencer par tracer le tableau de variations de $t \mapsto E(t)+I(t)$). Trouver en particulier une condition garantissant la propagation de l'épidémie et calculer le maximum de $t \mapsto E(t) + I(t)$.

Fin de l'épreuve