Polynômes à coefficients réels ou complexes

Table des matières

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités sur les polynômes

1 *Ensemble des polynômes à coefficients réels ou complexes*

Définition 1

— On appelle **polynôme à coefficients réels** toute fonction de la forme :

$$P : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \end{array}$$

où n est un entier naturel fixé et $a_0, \ldots, a_n$ sont $n+1$ nombres réels fixés.
Les réels $a_0, \ldots, a_n$ s'appellent les **coefficients** du polynôme.

— On appelle **polynôme à coefficients complexes** toute fonction de la forme :

$$P : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \end{array}$$

où n est un entier naturel fixé et $a_0, \ldots, a_n$ sont $n+1$ nombres complexes fixés.
Les complexes $a_0, \ldots, a_n$ s'appellent les **coefficients** du polynôme.

Exemples 1 :

— La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^5 - 4x^2 + 3 \end{array}$ est un polynôme à coefficients réels (on peut aussi dire polynôme réel).

— La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x^6 - \mathrm{i}x^3 + 2\mathrm{i} + 1 \end{array}$ est un polynôme à coefficients complexes (on peut aussi dire polynôme complexe).

— La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x^2 + 1 \end{array}$ est un polynôme à coefficients complexes.

Notation universelle :

On note X le polynôme défini par $x \longmapsto x$.
On utilise la même notation que ce polynôme soit à coefficients réels ou complexes

Remarques :

— Cette notation universelle a pour but de simplifier les notations des polynômes.

— Grâce aux règles d'opérations sur les fonctions on peut remarquer que X^n est la fonction $x \mapsto x^n$ et que les règles de calcul avec X prolongent les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

— Cas particulier et abus : la fonction X^0 est donc la fonction $x \mapsto 1$. On s'autorise à écrire 1 plutôt que X^0. Il s'agit d'un abus car 1 est un réel et X^0 est une fonction, ils ne vivent donc pas dans le même monde ! Cela donnera alors lieu à des écritures abusives du type $5X^2 + 3$ qui correspond au polynôme $x \mapsto 5x^2 + 3$ que l'on devrait normalement écrire $5X^2 + 3X^0$.

Exemple 2 :

— Le polynôme défini par $P : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x + 1 \end{array}$ peut s'écrire $P = 2X + X^0$.
On s'autorise l'abus de notation : $P = 2X + 1$.

— Le polynôme défini par $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x^6 - \mathrm{i}x^3 + 2\mathrm{i} + 1 \end{array}$ peut s'écrire $X^6 - \mathrm{i}X^3 + 2\mathrm{i} + 1$.

Notations :
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble de tous les polynômes à coefficients réels.
- On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble de tous les polynômes à coefficients complexes.

2 *Opérations usuelles et premières propriétés*

Propriété 1

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]$ définis par $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell} b_k X^k$. Soit aussi $\alpha \in \mathbb{K}$.
En posant que $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_k = 0$ si $k > \ell$ on a les résultats ci-dessous.
- $\alpha P + Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{\max(n,\ell)} (\alpha a_k + b_k) X^k$. On peut donc affirmer que $aP + Q \in \mathbb{K}[X]$.
- $P \times Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+\ell} c_k X^k$ avec $c_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$. On peut donc affirmer que $P \times Q \in \mathbb{K}[X]$.
- Il est difficile de donner une expression générale simple de $P \circ Q$ mais on peut affirmer que $P \circ Q \in \mathbb{K}[X]$.

Théorème 1

Soit $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$. On a l'équivalence :

$$P = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![0; n]\!], \quad a_i = 0.$$

En d'autres termes, **un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.**

Corollaire 1

Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients sont égaux.

Exemple 3 :

Déterminons les réels a, b, c, d et e tels que $X^5 + 1 = (X + 1)(aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e)$.
On commence par remarquer que :

$$(X + 1)(aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e) = aX^5 + (a + b)X^4 + (b + c)X^3 + (c + d)X^2 + (d + e)X + e.$$

On en déduit donc que :

$$X^5 + 1 = (X + 1)(aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \\ 0 = a + b \\ 0 = b + c \\ 0 = c + d \\ 0 = d + e \\ 1 = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = -1 \\ e = 1. \end{cases}$$

.

En conclusion, $X^5 + 1 = (X + 1)(X^4 - X^3 + X^2 - X + 1)$.

Propriété 2

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels ou complexes. On a l'équivalence :

$$P \times Q = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad P = 0 \quad \text{ou} \quad Q = 0.$$

Théorème - définition 2
Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors il existe un unique entier naturel n tel que :

$$\begin{cases} P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \\ \text{avec } (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \\ \text{et } a_n \neq 0. \end{cases}$$

Cet entier naturel n s'appelle le **degré** du polynôme P. On note $n = \deg(P)$.
Le réel ou complexe a_n s'appelle le **coefficient dominant** du polynôme P.
Par **convention**, $\deg(0) = -\infty$.

Exemples 4 :
- Soit $P = 3X^6 + 2X$. $\deg(P) = 6$.
- Soient a, b et c trois complexes et $P = aX^2 + bX + c$. Alors, sans information supplémentaire, on peut juste affirmer que $\deg(P) \leqslant 2$.

Définition 2
On dit que P est **un polynôme unitaire** si, et seulement si, le coefficient dominant de P est égal à 1.

Propriété 3
Soient P et Q deux polynômes non nuls à coefficients réels ou complexes.
- Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- Si $\deg(P) = \deg(Q)$, $\deg(P + Q) \leqslant \deg(P)$.
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.

Démonstration :

Dans toute cette démonstration on note $n = \deg(P)$ et $\ell = \deg(Q)$. On note de plus $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{\ell} b_k X^k$. Comme n et ℓ désignent les degrés respectifs de P et Q on sait que $a_n \neq 0$ et $b_\ell \neq 0$.
- Supposons par exemple que $n < \ell$.

  On pose alors $a_{n+1} = \ldots = a_\ell = 0$. On peut alors écrire $P = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$.

  On en déduit que $P + Q = \sum_{k=0}^{\ell} (a_k + b_k) X^k$. De plus $a_\ell + b_\ell = b_\ell \neq 0$.

  Donc $\deg(P + Q) = \ell = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
  On raisonne de même si $\ell < n$ en posant $b_{\ell+1} = \ldots = b_n = 0$.
- Supposons que $n = \ell$. On a alors $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ avec $b_n \neq 0$.

  On en déduit que $P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k$. Mais comme on ne sait pas si $a_n + b_n$ est nul ou non, on peut juste dire que $\deg(P + Q) \leqslant n$.
- On a vu que $P \times Q = \sum_{k=0}^{n+\ell} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$, en posant $a_i = 0$ si $i > \deg(P)$ et $b_i = 0$ si

$i > \deg(Q)$.

On a donc $c_{n+\ell} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n+\ell} a_i b_{n+\ell-i} = a_n b_\ell$ car si $i < n$, alors $n+\ell-i > \ell$ et donc $b_{n+\ell-i} = 0$ et si $i > n$ alors $a_i = 0$.

Comme $a_n \neq 0$ et $b_\ell \neq 0$ on a $c_{n+\ell} \neq 0$ et donc $\deg(P \times Q) = n + \ell = \deg(P) + \deg(Q)$.

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Alors $\lambda P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$ et $\lambda a_n \neq 0$ car $\lambda \neq 0$ et $a_n \neq 0$. Donc $\deg(\lambda P) = n = \deg(P)$.

□

Définition 3

Soit n un entier naturel.

— L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg(P) \leqslant n\}.$$

— L'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{C}_n[X]$:

$$\mathbb{C}_n[X] = \{P \in \mathbb{C}[X] \ / \ \deg(P) \leqslant n\}.$$

Exemples 5 :

$X^2 + 3X \in \mathbb{R}_2[X]$ et $X^2 + 3\mathrm{i}X \in \mathbb{C}_5[X]$.

Remarques :

— $\mathbb{K}_0[X]$ est l'ensemble des polynômes constants.

— **ATTENTION** tous les polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ ne sont pas forcément de degré exactement n. Par exemple, le polynôme nul appartient à $\mathbb{K}_n[X]$ quelle que soit la valeur de n.

Propriété 4

Soient n et k deux entiers naturels. Si $n \leqslant k$ alors $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}_k[X]$.

II Racines d'un polynôme

1 *Définition et premières propriétés*

Définition 4

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

On dit que α est **une racine** de P si, et seulement si, $P(\alpha) = 0$.

Théorème 3 : Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme **à coefficients complexes** et **non constant** admet au moins une racine.

Remarque :

Admis en BCPST

Propriété 5

Soit P un polynôme **à coefficients réels** de degré impair. Alors P admet au moins une racine réelle.

Remarque :

Vous référer à votre cours de sup pour une démonstration.

Propriété 6

Soit P un polynôme **à coefficients réels**.

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.

Exemple 6 :
Soit $P = X^8 + X^6 + X^4 - 3X^3 + 3$ et j le nombre complexe usuel $j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

1. Montrer que j est une racine de P.
2. Sans calculs supplémentaires, déterminer une autre racine de P.

1. On rappelle que le complexe j vérifie les propriétés suivantes (à retenir) :
$$\mathrm{j}^3 = 1, \qquad \mathrm{j}^2 + \mathrm{j} + 1 = 0, \qquad \bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2.$$
On a donc $P(\mathrm{j}) = \mathrm{j}^8 + \mathrm{j}^6 + \mathrm{j}^4 - 3\mathrm{j}^3 + 3 = \mathrm{j}^2 + 1 + \mathrm{j} - 3 + 3 = 0$.
j est donc bien une racine de P.
2. Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, on peut affirmer que $\overline{j} = \mathrm{j}^2$ est une autre racine de P.

2 Factorisation des polynômes

a Caractérisation de la notion de racine par la factorisation

Théorème 4 : Caractérisation de la notion de racine par la factorisation
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
α est une racine de P si, et seulement s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha) \times Q$.

Remarques :
— Lorsque $P = (X - \alpha)Q$ on dit que $X - \alpha$ divise P.
— Vous avez fait la démonstration en sup dans le cas des polynômes réels, le principe est exactement le même pour les polynômes complexes.

Corollaire 2
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $\forall i \neq j,\ \alpha_i \neq \alpha_j$.
α_1, α_2, ..., et α_p sont des racines de P si, et seulement s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_p) \times Q$.

Démonstration :

$\Longleftarrow$ Supposons que $P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_p) \times Q$. Alors il est évident que $P(\alpha_i) = 0$ et donc α_1, ..., α_p sont des racines de P.

$\Longrightarrow$ Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(p)$: « si α_1, α_2, ..., et α_p sont des racines distinctes de P alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_p) \times Q$ » est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
La propriété $\mathscr{P}(1)$ découle directement du théorème précédent.
Supposons maintenant que $\mathscr{P}(p)$ est vraie pour un entier p non nul fixé.
Supposons que α_1, α_2, ..., et α_{p+1} sont des racines distinctes de P.
Comme α_{p+1} est une racine de P, d'après le théorème précédente, il existe un polynôme R tel que $P = (X - \alpha_{p+1}) \times R$.
Pour $i \in [\![1; p]\!]$, on a $P(\alpha_i) = 0$ donc $(\alpha_i - \alpha_{p+1})R(\alpha_i) = 0$.
Or les α_i sont distincts donc $\alpha_i - \alpha_{p+1} \neq 0$. On en déduit que $R(\alpha_i) = 0$, c'est-à-dire que α_1, α_2, ...et α_p sont des racines de R.
D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $R = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_p) \times Q$.
On en déduit que $P = (X - \alpha_{p+1})(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_p) \times Q$.
$\mathscr{P}(p + 1)$ est donc vraie.
D'après le principe de récurrence on a bien montré que si α_1, α_2, ..., et α_p sont des racines distinctes de P alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_p) \times Q$.

$\square$

Propriété 7
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0$.
Alors $\{\text{racines de } P\}$ est un ensemble fini et $\text{card}(\{\text{racines de } P\}) \leqslant \deg(P)$.

Démonstration :

Supposons que $\text{card}(\{\text{racines de } P\}) > \deg(P)$ ou que P admet une infinité de racines. Notons $n = \deg(P)$.

Il est donc possible de choisir au moins $n+1$ réels α_1, α_2, ..., et α_{n+1} qui sont des racines distinctes de P.

D'après le corollaire 2, il existe donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_{n+1}) \times Q$.

Comme $P \neq 0$, on a $Q \neq 0$.

On a donc, d'après les propriétés des degrés, $\deg(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \deg(X-\alpha_k) + \deg(Q) = n+1+\deg(Q) > n$, ce qui est absurde. Donc $\{\text{racines de } P\}$ est un ensemble fini et $\text{card}(\{\text{racines de } P\}) \leqslant \deg(P)$.

□

Corollaire 3
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\{\text{racines de } P\}$ est un ensemble infini ou $\text{card}(\{\text{racines de } P\}) \geqslant n+1$, alors P est le polynôme nul.

Démonstration :

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. On vient de montrer que si $P \neq 0$ alors $\{\text{racines de } P\}$ est un ensemble fini et $\text{card}(\{\text{racines de } P\}) \leqslant \deg(P)$.

La contraposée de cette affirmation s'écrit :

Si $\{\text{racines de } P\}$ est un ensemble infini ou $\text{card}(\{\text{racines de } P\}) > \deg(P)$ alors $P = 0$.

Comme $\deg(P) \leqslant n$, on peut déduire de cette affirmation que si $\{\text{racines de } P\}$ est un ensemble infini ou $\text{card}(\{\text{racines de } P\}) \geqslant n+1$, alors P est le polynôme nul.

□

Théorème 5 : Un premier théorème de factorisation
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré **exactement** $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \in \mathbb{K}^*$ son coefficient dominant.
On suppose que P admet n racines distinctes notées α_1, ..., α_n.

Alors $P = a_n(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n)$.

Démonstration :

D'après le corollaire 2, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n) \times Q$.

D'après les règles d'opérations sur les degrés, on a $\deg((X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n) \times Q) = n + \deg(Q)$.

Donc on en déduit que $\deg(Q) = 0$, c'est-à-dire que Q est un polynôme constant. Notons $Q = \beta$.

En développant le produit $\beta(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n)$ on remarque que le coefficient de X^n est β. Donc, $P = \beta(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n)$ implique que $\beta = a_n$.

On a donc bien $P = a_n(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n)$.

□

Exemple 7 :
Soit $P = (X^2+1)^3 - X^6 + 6X^3 + 6X - 1$.

1. Montrer que i est une racine de P.
2. Calculer $P(-2)$.
3. Factoriser au maximum P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

1. $P(\mathrm{i}) = (\mathrm{i}^2+1)^3 - \mathrm{i}^6 + 6\mathrm{i}^3 + 6\mathrm{i} - 1 = 0^3 + 1 - 6\mathrm{i} + 6\mathrm{i} - 1 = 0$.
   Donc i est bien une racine de P.
2. $P(-2) = 5^3 - 2^6 - 6 \times 2^3 - 6 \times 2 - 1 = 125 - 64 - 48 - 12 - 1 = 0$.
3. Comme P est visiblement un polynôme à coefficients réels, on peut déduire de la question précédente que $-\mathrm{i}$ est aussi une racine de P.
   On connait donc 3 racines de P. Il est intéressant de s'intéresser au degré de P pour savoir combien de racines « il nous manque ».
   Pour déterminer le degré de P nous sommes ici obligés de l'écrire sous sa forme développée car les règles d'opération sur les degré ne nous permettent pas ici de conclure avec la forme donnée par l'énoncé.
   On obtient, après avoir développé : $P = 3X^4 + 6X^2 + 3X^2 + 6X$. P est donc un polynôme de degré 4 et de coefficient dominant 3.
   Et sur cette écriture on voit aussi très vite que $P(0) = 0$.
   Ainsi, i, $-\mathrm{i}$, 0 et -2 sont des racines de P et ce sont les seules car P est de degré 4.
   On en déduit la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$:
   $$P = 3X(X+2)(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i}).$$
   Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, il suffit de développer les facteurs faisant intervenir les racines complexes conjuguées. On obtient :
   $$P = 3X(X+2)(X^2+1).$$

b Multiplicité d'une racine

Théorème - définition 6
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P.
Alors il existe un unique $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\begin{cases} P = (X-\alpha)^k Q \text{ avec } Q \in \mathbb{K}[X] \\ Q(\alpha) \neq 0. \end{cases}$
k s'appelle **l'ordre de multiplicité de α.**

Remarques :
— On peut aussi dire multiplicité de α ou encore ordre de α.
— Lorsque l'ordre de multiplicité de α est égal à 1 on dit que α est une **racine simple** et lorsque l'ordre de multiplicité de α est supérieur ou égal à deux on dit que α est une **racine multiple**.

Exemple 8 :
Soit $P = X^3 + \mathrm{i}X^2 + X + \mathrm{i}$. Montrons que $-\mathrm{i}$ est une racine de multiplicité égale à 2.
On a $P(-\mathrm{i}) = \mathrm{i} - \mathrm{i} - \mathrm{i} + \mathrm{i} = 0$ donc $-\mathrm{i}$ est bien une racine de P.
On a alors $P = (X+\mathrm{i})(X^2+1)$. $-\mathrm{i}$ est encore racine de X^2+1.
On peut donc écrire $P = (X+\mathrm{i})^2(X-\mathrm{i})$. $-\mathrm{i}$ n'est pas une racine de $X - \mathrm{i}$ donc on peut conclure que $-\mathrm{i}$ est une racine de P d'ordre de multiplicité égale à 2.

Propriété 8
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
α est une racine de P de multiplicité supérieure ou égale à deux si, et seulement si, $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$.

Démonstration :

On ne démontre ici que le cas où $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$ Supposons que α est une racine de P de multiplicité supérieure ou égale à 2. Il existe alors $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^2 Q$. (***Attention***, *on ne sait pas ici si* α *est encore racine de* Q.)
On a évidemment $P(\alpha) = 0$ et $P' = 2(X - \alpha)Q + (X - \alpha)^2 Q'$, donc $P'(\alpha) = 0$.

$\Longleftarrow$ Comme $P(\alpha) = 0$, α est une racine de P donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)Q$.
On a donc $P' = Q + (X - \alpha)Q'$. Ainsi, $P'(\alpha) = 0 \Rightarrow Q(\alpha) = 0$. Donc il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = (X - \alpha)R$.
Ainsi, $P = (X - \alpha)Q = (X - \alpha)^2 R$. α est d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2.

□

Remarque :
Cette propriété est énoncée ici uniquement pour les polynômes à coefficients réels car la dérivation des fonctions complexes n'est pas au programme de BCPST.

Propriété 9
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0$ et α_1, ..., α_p des racines distinctes de P.
On note m_i la multiplicité de la racine α_i. Alors $m_1 + m_2 + \ldots + m_p \leqslant \deg(P)$.

Propriété 10
Soit P un polynôme **à coefficients réels**.
Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P de même ordre de multiplicité que α.

c Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 7 : Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
On note A le coefficient dominant de P, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{C}^k$ TOUTES les racines distinctes deux à deux de P et $(m_1, \ldots, m_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ leurs multiplicités respectives.
Alors $P = A(X - \alpha_1)^{m_1}(X - \alpha_2)^{m_2} \ldots (X - \alpha_k)^{m_k}$.

Remarque :
Le théorème donnant la factorisation des polynômes à coefficients réels dans $\mathbb{R}[X]$ est hors-programme.