

Problème A

1. La suite (v_n) est géométrique de raison q et de premier terme v_0 . On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n$.

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < q < 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \end{cases}.$

On a donc extinction si, et seulement si, $0 < q < 1$.

2. a) La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par, $f(x) = x + \frac{1}{2}x \left(\frac{S-x}{S} \right)$ vérifie bien que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

La fonction f étant polynômiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{S-x}{S} \right) - \frac{1}{2S}x = \frac{3}{2} - \frac{1}{S}x.$$

Un polynôme étant équivalent à son monôme de plus haut degré en $+\infty$, on a $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2S}x^2$, et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$3S/2$	$+\infty$
$f'(x)$		+	−
$f(x)$	0	$9S/8$	$-\infty$

b)

```

1 S = 30
2 v0 = 5
3 L=[v0]
4 N=[0]
5 v=v0
6 for k in range(1,20):
7     v=v+1/2*v*(S-v)/S
8     L.append(v)
9     N.append(k)
10
11 plt.plot(N,L, 'o')
12 plt.xlabel("n")
13 plt.ylabel("v_n")
14 plt.show()
```

c) `import matplotlib.pyplot as plt`

d) On remarque que selon la valeur de v_0 les variations de la suite ne sont pas les mêmes.

Pour $v_0 > 30$, la suite semble strictement décroissante, pour $v_0 < 30$ la suite semble strictement croissante et pour $v_0 = 30$, la suite semble constante.

Dans tous les cas, la suite semble converger vers 30.

e) On suppose donc $v_0 \in]0; S]$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $0 < v_n \leq v_{n+1} \leq S$ ».

- On sait que $v_1 = f(v_0)$. Comme $v_0 \in]0; S]$, on a $\frac{1}{S}v_0 \left(\frac{S-v_0}{S} \right) \leq 0$ et donc $v_1 > 0$.

De plus, $v_1 - v_0 = \frac{1}{2}v_0 \left(\frac{S - v_0}{S} \right)$, donc, de même que précédemment, $v_1 - v_0 \geq 0$.

Et enfin, on a $v_0 \leq S$ et f est croissante sur $[0; S] \subset \left[0; \frac{3S}{2}\right]$ donc $f(v_0) \leq f(S)$, c'est-à-dire $v_1 \leq S$.

On a donc bien $0 < v_0 \leq v_1 \leq 2$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

f étant strictement croissante sur $[0; S]$, on a

$$0 < v_n \leq v_{n+1} \leq S \implies f(0) < f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f(S) \iff 0 < v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq S.$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Grâce au principe de récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n \leq v_{n+1} \leq S$.

La suite (v_n) est donc croissante et majorée par S .

D'après le théorème de la limite monotone, la suite (v_n) converge vers une limite ℓ qui vérifie, grâce aux propriétés d'encadrement de limites, $\ell \in [v_0; S]$.

De plus, en passant à la limite dans la relation $v_{n+1} = f(v_n)$ (en utilisant la continuité de f), on a $\ell = f(\ell)$. Or,

$$\ell = f(\ell) \iff 0 = \frac{1}{2}\ell \left(\frac{S - \ell}{S} \right) \iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = S.$$

Comme $v_0 > 0$, la seule possibilité est $\ell = S$.

La suite (v_n) converge donc vers S (comme prédit!).

3. a) Dans cette question f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{1}{2}x \left(\frac{S - x}{S} \right) \left(\frac{x - A}{S} \right)$.

b) Pour $x \in [0; S]$, on a $f(x) - x = \frac{1}{2}x \left(\frac{S - x}{S} \right) \left(\frac{x - A}{S} \right)$.

Or $\frac{1}{2}x \geq 0$, $\frac{S - x}{S} \geq 0$ et $S > 0$, donc $f(x) - x$ est du signe de $x - A$.

En résumé, pour $x \in [0; A]$, $f(x) - x \leq 0$ et pour $x \in [A; S]$, $f(x) - x \geq 0$.

- c) f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on sait qu'une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Or, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

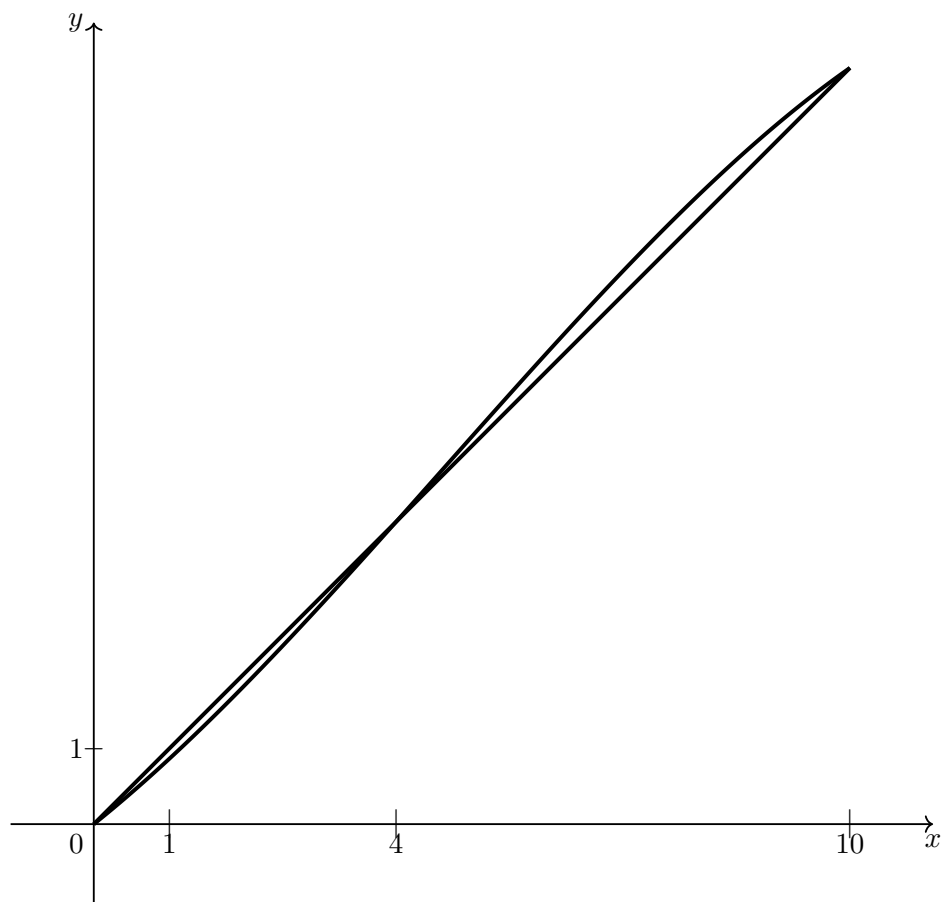
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{S - x}{S} \right) \left(\frac{x - A}{S} \right) - \frac{1}{2S}x \left(\frac{x - A}{S} \right) + \frac{1}{2S}x \left(\frac{S - x}{S} \right).$$

Un équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est donc $y = \left(1 - \frac{A}{2S}\right)x$

et une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse S est donc

$$y = \left(1 - \frac{S - A}{2S}\right)(x - S) + S.$$

d)



e) Cette fois il semble que :

- Pour $0 < v_0 < A$, la suite (v_n) est décroissante et converge vers 0.
- Pour $v_0 = A$, la suite (v_n) est constante.
- Pour $A < v_0 < S$, la suite (v_n) est croissante et converge vers S .

f) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $0 < v_n < A$ ».

- D'après l'énoncé $v_0 \in]0; A[$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
 f étant strictement croissante sur $[0; A]$, on a

$$0 < v_n < A \implies f(0) < f(v_n) < f(A) \iff 0 < v_{n+1} < A,$$

car $f(0) = 0$ et $f(A) = A$.

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Grâce au principe de récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < A$.

Avec une nouvelle récurrence, on démontre que (v_n) est décroissante.

On sait que $v_1 = f(v_0)$. Comme $v_0 \in]0; A[$, on a $\frac{1}{2}v_0 > 0$, $\left(\frac{S-v_0}{S}\right) > 0$ et $\frac{v_0-A}{S} < 0$.

Donc $\frac{1}{2}v_0 \left(\frac{S-v_0}{S}\right) \left(\frac{v_0-A}{S}\right) < 0$ et ainsi $v_1 < v_0$.

Cela montre que la propriété $v_{n+1} \leq v_n$ est vraie pour $n = 0$.

Ensuite, l'implication $v_{n+1} \leq v_n \implies f(v_{n+1}) \leq f(v_n)$, vraie car f est croissante sur $[0; A]$, montre l'hérédité de notre récurrence.

La suite (v_n) est donc décroissante et minorée par 0.

D'après le théorème de la limite monotone, la suite (v_n) converge vers une limite ℓ qui vérifie, grâce aux propriétés d'encadrement de limites, $\ell \in [0; v_0]$.

De plus, en passant à la limite dans la relation $v_{n+1} = f(v_n)$ (en utilisant la continuité de f), on a $\ell = f(\ell)$. Or,

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}\ell \left(\frac{S-\ell}{S} \right) \left(\frac{\ell-A}{S} \right) \Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = A \text{ ou } \ell = S.$$

Comme $v_0 < A$, la seule possibilité est $\ell = 0$.

La suite (v_n) converge donc vers 0 (comme prédit!).

- g) Dans le cas où $v_0 \in]A : S[$, on montre par une première récurrence que $v_n \in]A : S[$ puis on remarque que $v_1 > v_0$ donc on montre ensuite par récurrence que la suite (v_n) est croissante.

La suite étant croissante et majorée elle converge et par un raisonnement analogue aux questions 2.e) et 3.f), on montre qu'elle converge vers S .

Si $v_0 = A$, comme $f(A) = A$, la suite est constante égale à A .

- h) S est la quantité maximale de population. C'est la population atteinte s'il y a survie. A est la population initiale minimale pour avoir survie : en dessous il y a extinction.

4. a) On remarque que $y'(t) = 0 \Leftrightarrow y(t) = 0$ ou $y(t) = S$ ou $y(t) = A$.

Les points d'équilibres sont donc 0, A et S .

- b) F est polynômiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{S-x}{S} \right) \left(\frac{x-A}{S} \right) - \frac{1}{2S}x \left(\frac{x-A}{S} \right) + \frac{1}{2S}x \left(\frac{S-x}{S} \right).$$

On a donc $F'(0) = -\frac{A}{2S} < 0$, $F'(A) = \frac{A}{2S} \times \frac{S-A}{S} > 0$ et $F'(S) = -\frac{S-A}{2S} < 0$.

A est un point d'équilibre instable et 0 et S sont des points d'équilibre stables.

- c) On a ici une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, on peut donc donner, sans se lancer dans de grandes explications, les solutions de l'équation différentielle.

Les solutions sont toutes les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{F'(x_0)t} + x_0$ où C est un réel déterminé par la condition initiale.

On peut être encore plus précis en remarquant que $C = y(0) - x_0$.

- d) On peut remarquer que le signe de $F'(x_0)$ a une influence sur les variations et la limite en $+\infty$ de la fonction déterminée ci-dessus.

Lorsque $F'(x_0) < 0$, $y(t)$ tend vers x_0 mais pas lorsque $F'(x_0) > 0$, $y(t)$ « s'éloigne » de x_0 .

Donc lorsqu'on « s'écarte » légèrement d'un point d'équilibre stable on va y revenir alors que lorsqu'on « s'écarte » d'un point d'équilibre instable, on s'en éloigne de plus en plus.

Cela est cohérent avec le vocabulaire « stable » et « instable ».

Problème B

Partie A : Étude théorique

1. Dans ce cas on a $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} q = q \times Z_n$.

Z_n est une suite géométrique de raison q et de premier terme $Z_0 = 1$ donc $Z_n = q^n$.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $Z_n(\Omega) = \{0; 1\}$ et $P(Z_n = 1) = p^n$ ».

- On a $Z_1 = X_{0,1}$ et $X_{0,1}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

Donc $Z_1(\Omega) = \{0; 1\}$ et $P(Z_1 = 1) = p$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Si $Z_n = 0$, alors il n'y a pas d'individu à la génération n et donc pas non plus à la génération $n + 1$.

Si $Z_n = 1$ alors $Z_{n+1} = X_{n,1}$ et donc Z_{n+1} vaut 0 ou 1.

On a donc bien $Z_{n+1}(\Omega) = \{0; 1\}$.

De plus, d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([Z_n = 0], [Z_n = 1])$ on a

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = 1) &= P(Z_n = 0)P_{[Z_n=0]}(Z_{n+1} = 1) + P(Z_n = 1)P_{[Z_n=1]}(Z_{n+1} = 1) \\ &= 0 + p^n \times P_{[Z_n=1]}(X_{n,1} = 1) \\ &= p^n \times p = p^{n+1}. \end{aligned}$$

On a bien montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Grâce au principe de récurrence on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n(\Omega) = \{0; 1\}$ et $P(Z_n = 1) = p^n$.

Comme $p \in]0; 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} p^n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - p^n = 1$.

3. S'il n'y a pas d'individus à la génération n alors obligatoirement il n'y en aura pas à la génération $n + 1$. On a donc $[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]$.

Par propriété de la probabilité, on a donc $P(Z_n = 0) \leq P(Z_{n+1} = 0)$ c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$.

La suite (u_n) est donc bien croissante et comme elle est majorée par 1 (c'est une probabilité!), d'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) converge.

4. L'énoncé signifie que $X_{n,i}(\Omega) = \{0; 2\}$, $P(X_{n,i} = 2) = p$ et $P(X_{n,i} = 0) = 1 - p$.

- a) On a $Z_1 = X_{0,1}$ donc $Z_1(\Omega) = \{0; 2\}$, $P(Z_1 = 2) = p$ et $P(Z_1 = 0) = 1 - p$.

Avec nos formules du cours :

$$\begin{aligned} E(Z_1) &= 0 \times P(Z_1 = 0) + 2 \times P(Z_1 = 2) = 2p \\ E(Z_1^2) &= 0^2 \times P(Z_1 = 0) + 2^2 \times P(Z_1 = 2) = 4p \\ V(Z_1) &= E(Z_1^2) - E(Z_1)^2 \\ &= 4p - 4p^2 = 4p(1 - p). \end{aligned} \quad \text{Koenig-Huygens}$$

- b) D'après la formule des probabilités totales utilisée avec le système complet d'événements $([Z_1 = 0], [Z_1 = 2])$ on a :

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = 0) &= P(Z_1 = 0)P_{[Z_1=0]}(Z_{n+1} = 0) + P(Z_1 = 2)P_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0) \\ &= pP_{[Z_1=0]}(Z_{n+1} = 0) + (1 - p)P_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0). \end{aligned}$$

- c) Calculer la probabilité que la population soit éteinte à la génération $n + 1$ sachant que la génération 1 comporte 2 individus revient exactement au même que de considérer chacun de ces 2 individus comme la génération 0 de deux expériences indépendantes et de calculer la probabilité que la génération n issue de chacun de ces individus ne comporte plus d'individu.

Les deux expériences étant indépendantes on peut appliquer le principe multiplicatif et donc

$$P_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0) = u_n^2.$$

En remarquant alors que $P_{[Z_1=0]}(Z_{n+1} = 0) = 1$, on obtient bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1 - p) + pu_n^2.$$

d) Notons ℓ la limite de la suite (u_n) . On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-p) + pu_n^2 = (1-p) + p\ell^2$.

Par unicité de la limite on a donc $\ell = (1-p) + p\ell^2 \Leftrightarrow p\ell^2 - \ell + 1 - p = 0$.

On remarque alors que 1 et $\frac{1-p}{p}$ sont bien solutions de cette équation et ce sont les deux seules solutions car il s'agit d'une équation polynomiale de degré 2 qui admet donc au plus 2 solutions.

Ainsi $\ell = 1$ ou $\ell = \frac{1-p}{p}$.

e) Si $p \leq \frac{1}{2}$ alors $1-p \geq \frac{1}{2} \geq p$ donc $\frac{1-p}{p} \geq 1$.

Or, comme pour tout n , $u_n \in [0; 1]$ on a forcément $\ell \in [0; 1]$ et donc (u_n) ne peut pas converger vers $\frac{1-p}{p}$.

Ainsi, (u_n) converge vers 1.

f) Lorsque $p > \frac{1}{2}$ on a $1-p < \frac{1}{2} < p$ et donc $\frac{1-p}{p} < 1$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leq \frac{1-p}{p}$ ».

- On a $u_0 = 0$ car $Z_0 = 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est bien vérifiée (car $1-p$ et p sont strictement positifs).
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

On a alors, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, $u_n^2 \leq \frac{(1-p)^2}{p^2}$ et donc

$$(1-p) + pu_n^2 \leq 1-p + \frac{(1-p)^2}{p}.$$

$$\text{Or } 1-p + \frac{(1-p)^2}{p} = (1-p) \left(1 + \frac{1-p}{p} \right) = (1-p) \times \frac{1}{p}.$$

Donc on a bien $u_{n+1} \leq \frac{1-p}{p}$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

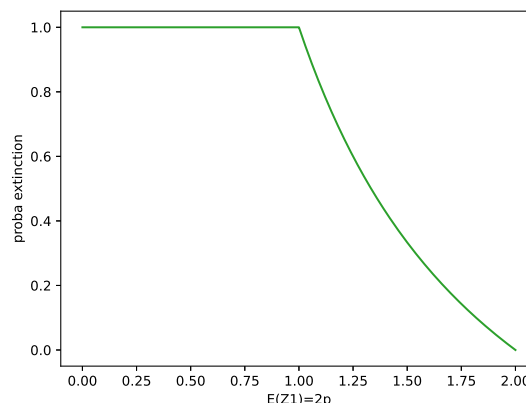
Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{1-p}{p}$.

Cela nous permet alors d'affirmer que $\ell \in \left[0; \frac{1-p}{p} \right]$ et donc $\ell = \frac{1-p}{p}$.

La probabilité d'extinction vaut donc $\frac{1-p}{p}$.

g) On rappelle que $E(Z_1) = 2p$. On doit donc tracer la fonction suivante

$$2p \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < 2p \leq 1 \\ \frac{1-p}{p} & \text{si } 1 < 2p < 2. \end{cases}$$



Il y a extinction presque-sûre si l'espérance d'un nombre de descendants est inférieure ou égale à 1, puis cette probabilité d'extinction décroît vers 0.

Partie B : Simulations informatique

5. a) p correspond au paramètre p de la question 4., c'est-à-dire la probabilité qu'un individu ait deux descendants, $1 - p$ étant la probabilité qu'il n'ait pas de descendant.
 n correspond au numéro de la génération pour laquelle on souhaite arrêter la simulation.

- b) La ligne 2 crée une matrice unidimensionnelle contenant $n + 1$ zéros. Cette matrice est vouée à contenir le nombre d'individus des générations 0 à n .

Les lignes 12 et 13 permettent d'arrêter la simulation dès qu'une génération contient 0 individus. Toutes les générations suivantes auront 0 individus donc il n'est plus nécessaire de continuer la simulation.

Les lignes 6 à 10 permettent de passer en revue chaque individu de la génération $i - 1$, de simuler s'il a 2 descendants ou 0 et de compter au final le nombre de descendants de la génération $i - 1$, soit le nombre d'individus de la génération i , que l'on stocke dans l'élément d'indice i de la matrice **population**.

- c) **population[i]** doit être égal au nombre d'individu de la génération i , soit la valeur de Z_i (en reprenant les notations de la partie A.). Or $Z_i = \sum_{j=1}^{Z_{i-1}} X_{i-1,j}$ et on peut remarquer que l'on peut écrire $X_{n,j} = 2Y_{n,j}$ avec $Y_{n,j}$ qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

Or les variables $Y_{n,j}$ sont indépendantes donc $\sum_{j=1}^{Z_{i-1}} Y_{i-1,j}$ suit une loi binomiale de paramètres Z_{i-1} (la variable **Z** de notre programme) et p .

Cela explique que l'on puisse remplacer les ligne 7 à 9 par la ligne proposée.

6. On a vu dans la partie A. que lorsque $p \leq \frac{1}{2}$ il y a presque sûrement extinction alors que pour $p > \frac{1}{2}$ l'extinction n'est pas presque sûre.

On peut penser que le graphique de gauche correspond à $p = 0,6$ (où il n'y a pas toujours extinction) et le graphique de droite (où il y a toujours extinction) correspond à $p = 0,4$.

7. Question facultative

- a) Il suffit ici de modifier les lignes 13 et 14 :

```
12     if descendants == 0:
13         return 1
14     return 0
```

- b) Le principe général est d'approcher la probabilité d'extinction par la fréquence de réalisation de l'événement « la lignée s'est éteinte au cours des 60 première générations » sur 5000 expériences.

```
1 def extinction(p):
2     proba=0
3     for _ in range(5000):
4         proba+=galton_watson_2(p,60)
5     return proba/5000
```

- c) On retrouve ici un graphique proche de celui obtenu à la question 4 avec un plateau pour $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$ et une décroissance jusqu'à 0 ensuite.