

DEVOIR MAISON N° 7

À RENDRE LE 17 NOVEMBRE 2025

Sujet d'oral Agro-véto 2021

Deux amis Anna et Benoit jouent au jeu suivant : ils possèdent une machine qui, à chaque sollicitation, leur donne aléatoirement un entier naturel X .

Si cet entier X est impair, Anna donne X euros à Benoit, on considère que Benoit a gagné.

Si X est nul, on considère que la manche est nulle.

Si X est pair non nul, Benoit donne X euros à Anna, on considère que Anna a gagné.

On pose G le gain algébrique de Anna.

On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre a ($a > 0$).

On note enfin :

— A : « Anna gagne », $p = P(A)$.

— B : « Benoit gagne », $q = P(B)$

— et C : « la manche est nulle », $r = P(C)$.

1. Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire G .

On rappelle que `np.random.poisson(a)` permet de simuler une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre a .

2. a) Déterminer r et exprimer p et q sous forme d'une somme.

b) Exprimer $p + q$ et $p - q$ en fonction de a .

c) En déduire les valeurs de r , p , q en fonction de a .

3. Compléter le programme de la question 1., pour qu'il permette de donner une estimation de la valeur de l'espérance du gain de Anna d'une part, et de la probabilité pour Anna de gagner, d'autre part.

4. D'après les simulations effectuées, d'après vous, à qui le jeu donne-t-il l'avantage ? *On pourra tester les valeurs du gain de la probabilité qu'Anna gagne pour $a = 2$.*

5. a) Exprimer G en fonction de X .

Indication ajoutée : On pourra se rappeler que $(-1)^X$ vaut 1 ou -1 en fonction de la parité de X .

b) Calculer l'espérance du gain G de Anna.

6. (**FACULTATIF**) On suppose désormais que X suit une loi géométrique de paramètre α . On garde les mêmes notations que précédemment.

a) Déterminer p , q , r .

b) Calculer l'espérance $E(G)$ de G après avoir justifié son existence.

c) Comment interpréter le signe de $E(G)$?