# Correction du devoir maison n$^{\text{o}}$ 7

1. 
```
import numpy as np

def simulG(a):
    X=np.random.poisson(a)
    if X%2==1:
        return -X
    else:
        return X
```

2. a) Par définition de $C$, $r = P(C) = P(X=0) = \mathrm{e}^{-a} \times \dfrac{a^0}{0!} = \mathrm{e}^{-a}$.

$$\begin{aligned} p = P(A) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}[X=2k]\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=2k) && \text{union d'événements disjoints} \\ &= \mathrm{e}^{-a}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

De même, $q = \mathrm{e}^{-a}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

b) On sait que $p+r+q=1$ car les événements $A$, $B$ et $C$ forment un système complet d'événements.
Donc $p+q = 1-r = 1-\mathrm{e}^{-a}$.
On a aussi

$$\begin{aligned} p-q &= \mathrm{e}^{-a}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-a}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{2k}\frac{a^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{2k+1}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-a}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-a)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-a}(\mathrm{e}^{-a}-1). \end{aligned}$$

c) D'après la question précédente,

$$\left\{\begin{array}{l} p+q = 1-\mathrm{e}^{-a} \\ p-q = \mathrm{e}^{-a}(\mathrm{e}^{-a}-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p+q = 1-\mathrm{e}^{-a} \\ 2p = 1-\mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-a}(\mathrm{e}^{-a}-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} q = 1-\mathrm{e}^{-a}-p \\ p = \dfrac{(1-\mathrm{e}^{-a})^2}{2} \end{array}\right.$$

Donc $p = \dfrac{(1-\mathrm{e}^{-a})^2}{2}$ et $q = \dfrac{(\mathrm{e}^{-a}+1)(1-\mathrm{e}^{-a})}{2}$. Et on a vu que $r = \mathrm{e}^{-a}$.

3. 
```
def espG(a):
    S=0
    for _ in range(1000):
        S+=simulG(a)
    return S/1000

def probaA(a):
    S=0
    for _ in range(1000):
        if simulG(a)>0:
            S+=1
    return S/1000
```

4. Pour $a=2$, l'appel de la fonction `espG` renvoie une valeur négative, ce qui signifie qu'en moyenne Anna perd de l'argent. Il semble donc que le jeu donne l'avantage à Benoit.
5. a) $G=(-1)^X X$.

   b) D'après la formule de transfert, sous réserve de convergence absolue de la série dont on calcule la somme, on a :

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k k\times \mathrm{e}^{-a}\frac{a^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{-a}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-a)^k}{(k-1)!} = -a\mathrm{e}^{-a}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-a)^j}{j!} \end{aligned}$$

On reconnait la somme d'une série exponentielle toujours absolument convergente.

$$= -a\mathrm{e}^{-2a}.$$

Ainsi $G$ admet une espérance et $E(G)=-a\mathrm{e}^{-2a}$.

On retrouve ce qu'on a observé sur nos simulations : en moyenne Anna perd de l'argent.

6. a) $p=\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha(1-\alpha)^{2k-1}=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\sum_{k=1}^{+\infty}((1-\alpha)^2)^k=\ldots=\dfrac{1-\alpha}{2-\alpha}$.

   $q=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha(1-\alpha)^{2k}=\alpha\sum_{k=0}^{+\infty}((1-\alpha)^2)^k=\ldots=\dfrac{1}{2-\alpha}$.

   $r=P(X=0)=0$.

   b) Sous réserve de convergence absolue,

$$E(G)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k k\alpha(1-\alpha)^{k-1}=-\alpha\sum_{k=1}^{+\infty}k(\alpha-1)^{k-1}.$$

$|\alpha-1|=1-\alpha\in]0;1[$ donc $E(G)$ existe et

$$E(G)=\frac{-\alpha}{(1-(1-\alpha))^2}=\frac{-\alpha}{(2-\alpha)^2}.$$

   c) Dans cette situation, le gain moyen d'Anna est à nouveau négatif donc en moyenne Anna perd de l'argent dans ce jeu.