Banque «Agro-Véto»
A - 0418

MATHÉMATIQUES

Méthodes de calcul et raisonnement
Durée : 2 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et, éventuellement, remplacera le sujet.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice :

Soit c un réel strictement positif.
On considère une variable aléatoire réelle X de densité :

$$f\,:\,\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R},\ t\mapsto\begin{cases}\dfrac{t}{c^2}\,e^{-t^2/(2c^2)} & \text{si } t>0\\[2ex] 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Étudier la fonction f : variations, limite en $+\infty$, valeur du maximum. Tracer le graphe de la fonction f.
2. Vérifier que la fonction f est une densité de probabilité.
3. (a) Rappeler, sans justification, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$.
   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.
   (c) Prouver que la variable aléatoire X possède une espérance.
4. Soit $n\in\mathbb{N}$. Prouver que si la variable aléatoire X^n possède une espérance, alors la variable aléatoire X^{n+2} possède une espérance donnée par :
$$E(X^{n+2})=c^2(n+2)E(X^n).$$
5. En déduire, par récurrence, que pour tout entier n, on a :
$$E(X^{2n})=2^nc^{2n}\,n! \quad\text{et}\quad E(X^{2n+1})=\sqrt{2\pi}\,\frac{(2n+1)!\,c^{2n+1}}{2^{n+1}\,n!}.$$
6. (a) Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
   (b) Déterminer la variance de X
   (c) En déduire un intervalle $[\alpha,\beta]$ tel que $P\left(X\in[\alpha,\beta]\right)\geq 99\%$.
7. Déterminer un réel positif γ tel que $P\left(X\in[0,\gamma]\right)=99\%$.
8. Comparer les intervalles obtenus aux deux questions précédentes.
   On pourra admettre que $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}-10\sqrt{\dfrac{4-\pi}{2}}<0$.

Problème :

On se propose d'étudier le modèle de diffusion d'Ehrenfest.
On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux N boules avec $N \in \mathbb{N}^*$.
À chaque étape, on choisit de façon équiprobable un entier entre 1 et N. Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans l'urne U_1, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 ; sinon, on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 à l'étape n. La variable aléatoire X_0 est donc égale au nombre de boules initialement présentes dans l'urne U_1, la variable aléatoire X_1 est égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 après un échange, ...
Par exemple, si l'urne U_1 contient initialement 3 boules et l'urne U_2 en contient 2, alors $N = 5$ et $X_0 = 3$.
On choisit alors un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 2, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 et l'on a $X_1 = 2$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 3, alors on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 et l'on a $X_2 = 3$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. À l'issue de l'échange, on aura $X_3 = 2$ avec une probabilité de $3/5$ et $X_3 = 4$ avec une probabilité de $2/5$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad Y_{n,k} = P(X_n = k).$$

I. Matrice de transition

1. On suppose que $N = 2$.

   (a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $Y_{n+1} = A_2 Y_n$ avec $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

   Une récurrence n'est pas nécessaire

   (b) La matrice A_2 est-elle diagonalisable ? *La réponse sera justifiée.*

Dans toute la suite $N \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

2. On considère la matrice de $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/N & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2/N & \ddots & & & \vdots \\ 0 & (N-1)/N & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & (N-1)/N & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2/N & 0 & 1 \\ 0 & & \cdots & \cdots & \cdots & 1/N & 0 \end{pmatrix}$$

   Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = AY_n$. *Une récurrence n'est pas nécessaire*

3. On note ${}^tA$ la matrice transposée de A.
   Déterminer lorsque $N = 2$ et $N = 3$, l'espace propre associé à la valeur propre 1 de ${}^tA$.

4. Prouver que, dans le cas général, la matrice ${}^{t}A$ possède 1 comme valeur propre.
5. En déduire que la matrice ${}^{t}(A - I_{N+1})$ est non inversible puis que la matrice A possède 1 comme valeur propre.

II. Détermination de l'espérance de la variable aléatoire X_n

Dans la suite, $n \in \mathbb{N}$ est fixé.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire $X_{n+1} - X_n$?
2. En déduire que $E(X_{n+1} - X_n) = 1 - \dfrac{2}{N} E(X_n)$.
   On pourra utiliser le système complet $("X_n = k")_{0 \leq k \leq N}$
3. En déduire l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n et de $E(X_0)$.
4. On suppose $N > 2$. Déterminer la limite de $E(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et en donner une interprétation.

III. Étude de la probabilité stationnaire

On s'intéresse dans cette question à l'espace propre de A associé à la valeur propre 1, que l'on notera E_1.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1$.
   Prouver que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $x_k = \dbinom{N}{k} x_0$.
2. En déduire la dimension de E_1.
3. Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}$.
4. Prouver qu'il existe un unique vecteur $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1$.
   On donnera son expression.
5. On considère la variable aléatoire X_∞ telle que :
   $$X_\infty(\Omega) = [\![0, N]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, N]\!],\ P(X_\infty = k) = \pi_k.$$
   Quelle est la loi suivie par X_∞ ? Donner son espérance et sa variance.
6. On suppose que X_0 suit la même loi que X_∞.
   Déterminer la loi de X_n pour tout entier n et donner une interprétation.