Vocabulaire sur les fonctions réelles de deux variables réelles

f désigne une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont les variables sont x et y.

— **Domaine de définition** : c'est l'ensemble des couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y)$ existe. On le note souvent $\mathscr{D}_f$. C'est une partie de $\mathbb{R}^2$ que l'on peut parfois demander de représenter graphiquement.

— **Pavé ouvert** : c'est une partie de $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$]a; b[\times]c; d[= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a < x < b \text{ et } c < y < d\}.$$

— **Fonctions partielles de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{(a, b)}$** :
  * Fonction partielle en (a, b) par rapport à la première variable : $f_x \ : \ t \mapsto f(t, b)$.
  * Fonction partielle en (a, b) par rapport à la seconde variable : $f_y \ : \ t \mapsto f(a, t)$.

— **Surface représentative de $\boldsymbol{f}$** : c'est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $(x, y) \in \mathscr{D}_f$ et $z = f(x, y)$. On la note souvent $\mathscr{S}_f$.

— **Ligne ou courbe de niveau $\boldsymbol{c}$** : il s'agit de l'intersection de $\mathscr{S}_f$ avec le plan d'équation $z = c$. On représente souvent plusieurs lignes de niveau dans un même plan, cela revient à tracer les courbes d'équation $f(x, y) = c$ pour différentes valeurs de c.

— **Fonction continue** : lorsqu'en tout point (a, b) de $\mathscr{D}_f$, on a $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

— **Dérivées partielles d'ordre 1** :
  * dérivée partielle par rapport à x en (a, b) : il s'agit, lorsqu'il existe, du nombre dérivée en a de la fonction partielle f_x de f en (a, b). On la note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ ou $\partial_1 f(a, b)$.
  * dérivée partielle par rapport à y en (a, b) : il s'agit, lorsqu'il existe, du nombre dérivée en b de la fonction partielle f_y de f en (a, b). On la note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ ou $\partial_2 f(a, b)$.

— **Gradient de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{(a, b)}$** : lorsque f admet des dérivées partielles par rapport aux deux variables en (a, b), il s'agit du vecteur :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right).$$

— **Fonction de classe $\boldsymbol{\mathscr{C}^1}$** : lorsque f admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport aux deux variables et que les fonctions $(x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont continues.

— **Dérivées partielles d'ordre 2** : lorsque cela est possible, on peut dériver les deux dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à chacune de leurs variables. On obtient 4 fonctions :
  * $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$: résultat obtenu en dérivant la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x ;
  * $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$: résultat obtenu en dérivant la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à y ;
  * $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$: résultat obtenu en dérivant la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à x ;
  * $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$: résultat obtenu en dérivant la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à y.

— **Extremum global** : on dit que f admet un maximum global (resp. minimum global) en (a, b) lorsque $\forall (x, y) \in \mathscr{D}_f,\ f(x, y) \leqslant f(a, b)$ (resp. $f(x, y) \geqslant f(a, b)$).

— **Extremum local** : on dit que f admet un maximum local (resp. minimum local) en (a, b) lorsqu'il existe un pavé ouvert $\mathscr{P}$ contenant (a, b) et inclus dans $\mathscr{D}_f$ tel que $\forall (x, y) \in \mathscr{P},\ f(x, y) \leqslant f(a, b)$ (resp. $f(x, y) \geqslant f(a, b)$).

Résultats importants et méthodes à connaitre

— **Calculer des dérivées partielles d'ordre 1** :
  * $\dfrac{\partial f}{\partial x}$: dans l'expression de la fonction f, on considère que y désigne un paramètre constant et on applique les règles de dérivation avec pour seule variable x.
  * $\dfrac{\partial f}{\partial y}$: dans l'expression de la fonction f, on considère que x désigne un paramètre constant et on applique les règles de dérivation avec pour seule variable y.

— **Petite variation de f** : si (x, y) est proche de (a, b) alors :

$$f(x,y) - f(a,b) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b),$$

ou encore

$$f(x,y) - f(a,b) = (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + o\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right).$$

— **Gradient et ligne de niveau** : le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a,b)$ est un vecteur normal à la ligne de niveau $f(x,y) = f(a,b)$ en (a,b).

— **Calculer des dérivées partielles d'ordre 2** :
  * $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$: dans l'expression de la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, on considère que y désigne un paramètre constant et on applique les règles de dérivation avec pour seule variable x.
  * $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$: dans l'expression de la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, on considère que x désigne un paramètre constant et on applique les règles de dérivation avec pour seule variable y.
  * $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$: dans l'expression de la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, on considère que y désigne un paramètre constant et on applique les règles de dérivation avec pour seule variable x.
  * $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$: dans l'expression de la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, on considère que x désigne un paramètre constant et on applique les règles de dérivation avec pour seule variable y.

— **Théorème de Schwarz** : si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un pavé **ouvert** alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

— Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un pavé **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ et admet un extremum local en (a,b) alors $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases}$.

— **Recherche d'extremum local sur un pavé ouvert** :
  * On commence par chercher les points $(a,b) \in \mathscr{D}_f$ qui vérifient $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases}$.

    S'il existe des extremums ils sont forcément parmi les solutions de ce système !
  * Pour chacun des couples (a,b) solutions du système ci-dessus on étudie le signe de $f(x,y) - f(a,b)$ soit de façon globale soit localement au voisinage de (a,b).
    Il est souvent astucieux d'étudier le signe de $f(a+h, b+k) - f(a,b)$ car pour une étude locale autour de (a,b), h et k sont au voisinage de 0.

— **Dérivation d'une expression du type $f(x(t), y(t))$** :
Notons φ la fonction définie par $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$. Si les fonctions x et y sont dérivables et que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 alors φ est dérivable et

$$\varphi'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$