Correction du devoir maison n$^{\text{o}}$ 5

Exercice 1 : Analyse

Partie I : formule du binôme négatif

1. **Méthode par récurrence :**

   On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « $\forall r \in [\![1;n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$ ».

   Pour $n=1$, d'une part $\displaystyle\binom{1}{1} = 1$ et d'autre part $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \binom{k-1}{1-1} = \binom{0}{0} = 1$.

   Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
   Pour tout $r \in [\![1;n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{r} &= \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} && \text{formule de Pascal}\\
&= \binom{n}{r-1} + \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1} && \text{hypothèse de récurrence}\\
&= \sum_{k=r}^{n+1} \binom{k-1}{r-1}.
\end{aligned}$$

   De plus, pour $r = n+1$, d'une part $\displaystyle\binom{n+1}{n+1} = 1$ et d'autre part $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+1} \binom{k-1}{n+1-1} = \binom{n}{n} = 1$.

   Donc, pour tout $r \in [\![1;n+1]\!]$, $\displaystyle\binom{n+1}{r} = \sum_{k=r}^{n+1} \binom{k-1}{r-1}$, c'est-à-dire que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Grâce au principe de récurrence on a montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } r \in [\![1;n]\!], \displaystyle\binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}.}$

   Méthode « directe » :
   Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![1;n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1} &= \sum_{k=r}^{n} \left(\binom{k}{r} - \binom{k-1}{r} \right) && \text{formule du triangle de Pascal}\\
&= \binom{n}{r} - \binom{r-1}{r} && \text{somme télescopique}\\
&= \binom{n}{r} && \text{convention.}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } r \in [\![1;n]\!], \binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}.}$$

2. a) Soit $x \in]0;1[$ et $(r,n) \in \mathbb{N}^*$ tel que $r \leqslant n$. On a :

$$\begin{aligned}
(1-x)f_{r,n}(x) &= \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^k - \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^{k+1} \\
&= \sum_{i=r-1}^{n-1} \binom{i+1}{r} x^{i+1} - \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^{k+1} \\
&= \binom{r}{r} x^r + \sum_{k=r}^{n-1} \left(\binom{k+1}{r} - \binom{k}{r} \right) x^{k+1} - \binom{n}{r} x^{n+1} \\
&= \binom{r-1}{r-1} x^r + \sum_{k=r}^{n-1} \binom{k}{r-1} x^{k+1} - \binom{n}{r} x^{n+1} && \text{formule de Pascal} \\
&= x \sum_{k=r-1}^{n-1} \binom{k}{r-1} x^k - \binom{n}{r} x^{n+1} \\
&= x f_{r-1,n-1}(x) - \binom{n}{r} x^{n+1}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0;1[,\ r \text{ et } n \text{ entiers tels que } 1 \leqslant r \leqslant n,\ (1-x)f_{r,n}(x) = x f_{r-1,n-1}(x) - \binom{n}{r} x^{n+1}.}$$

b) Soit $r \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant r$,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{1}{r!} \times n(n-1)\dots(n-r+1).$$

Or $n-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, $n-2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, …, $n-r+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc, par produit d'équivalents, $n(n-1)\dots(n-r+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^r$.

En effectuant une dernière multiplication, on obtient $\boxed{\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}.}$

3. a) Pour tout $x \in]0;1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{0} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Comme $x \in]0;1[$, $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_{0,n}(x) = \frac{1}{1-x}.}$

Pour tout $x \in]0;1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_{1,n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} x^k = \sum_{k=1}^{n} k x^k = x \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$.

On a reconnait une somme partielle de la série dérivée de la série géométrique. Comme $x \in]0;1[$, on a donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_{1,n}(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.}$

b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0;1[$.

On a supposé que $\lim_{n\to+\infty} f_{r-1,n}(x) = \frac{x^{r-1}}{(1-x)^r}$, donc on peut en déduire que $\lim_{n\to+\infty} f_{r-1,n-1}(x) = \frac{x^{r-1}}{(1-x)^r}$.

De plus, d'après la question 2.b), $\binom{n}{r} x^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r x^{n+1}}{r!}$, donc, d'après les croissances comparées et le fait que $x \in]0;1[$, $\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1} = 0$.

Par opérations sur les limites et grâce à la question 2.a), on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} (1-x) f_{r,n}(x) = x \times \frac{x^{r-1}}{(1-x)^r} = \frac{x^r}{(1-x)^r}.$$

En divisant par $1-x \neq 0$, on obtient $\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_{r,n}(x) = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.}$

Partie II : développement en série de $\ln(1-x)$

1. Soit $x \in]0;1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que pour tout $t \in [0;x]$, $t \neq 1$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$.

En intégrant pour t allant de 0 à x on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t & \qquad \text{linéarité de l'intégrale}\\
= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} & \qquad \text{simple calcul}\\
= \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i} & \qquad i=k+1.
\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n}\frac{x^i}{i}.}$

2. Soit $x \in]0;1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que pour tout $t \in [0;x]$, $0 < 1-t \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \dfrac{t^n}{1-t} \leqslant t^n$.

   Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

   Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$ ($x \in]0;1[$) donc par encadrement de limites, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0.}$

3. Soit $x \in]0;1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 1. de cette partie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

   D'après la question précédente on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

   $\boxed{\text{La série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n} \text{ est donc convergente et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).}$

Exercice 2 : Loi hypergéométrique

1.
```
from random import randint

def hypergeometrique(n,nb_blanches,nb_rouges):
    Nb=nb_blanches
    Nr=nb_rouges
    X=0
    for _ in range(n):
        if randint(1,Nb+Nr) <= Nb:
            X+=1
            Nb=Nb-1
        else:
            Nr=Nr-1
    return X
```

2. X désigne le nombre de boules blanches obtenues en effectuant n tirages. On a donc nécessairement $X(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$. Ainsi $\boxed{X(\Omega) \subset [\![0;N]\!].}$

   Comme nous venons de le voir, pour tout $\omega \in \Omega$, $0 \leqslant X(\omega) \leqslant n$.

   Mais on peut aussi remarquer qu'étant donné que les tirages se font sans remise, on ne peut pas obtenir plus de boules blanches que le nombre initial présent dans l'urne. Donc $X(\omega) \leqslant N_b$.

   Pour finir, toujours en raison des tirages sans remise, le nombre de boules rouges obtenue lors des n tirage (qui est $n-X$) ne peut pas dépasser N_r. On a donc $n - X(\omega) \leqslant N_r$, c'est-à-dire $X(\omega) \geqslant n - N_r$.

   Pour résumer, on a $\begin{cases} 0 \leqslant X(\omega) \leqslant n \\ n - N_r \leqslant X(\omega) \leqslant N_b \end{cases}$ ce qui peut se résumer en $\boxed{\max(0, n-N_r) \leqslant X(\omega) \leqslant \min(n, N_b).}$

3. On note $A_{n,k}$ l'ensemble de tout les tirages de n boules qui donnent k boules blanches. On cherche donc $\mathrm{card}(A_{n,k})$. On considère que toutes les boules sont différentes (par exemple numérotées).

Pour cela on commence pas dénombrer le nombre de positions possibles de ces k boules blanches : il y a $\binom{n}{k}$ positions possibles.
Ensuite, pour le choix des boules blanches il y a $N_b(N_b-1)\dots(N_b-k+1)$ possibilités.
Et enfin, pour le choix des boules rouges il y a $N_r(N_r-1)\dots(N_r-(n-k)+1)$ possibilités.
En résumé

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A_{n,k}) &= \binom{n}{k}N_b(N_b-1)\dots(N_b-k+1)\times N_r(N_r-1)\dots(N_r-(n-k)+1)\\ &= \binom{n}{k}\times\frac{N_b!}{(N_b-k)!}\times\frac{N_r!}{(N_r-(n-k))!}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le nombre de tirages de } n \text{ boules qui donne } k \text{ boules blanches est } \binom{n}{k}\times\frac{(pN)!}{(pN-k)!}\times\frac{(qN)!}{(qN-(n-k))!}.}$

4. On a en fait $[X=k]=A_{n,k}$. Tous les tirages étant équiprobables on a donc

$$\begin{aligned}P(X=k) &= \frac{\operatorname{card}(A_{n,k})}{\operatorname{card}(\Omega)}\\ &= \frac{\binom{n}{k}\times\frac{(pN)!}{(pN-k)!}\times\frac{(qN)!}{(qN-(n-k))!}}{N(N-1)\dots(N-n+1)}\\ &= \frac{n!\times\frac{(pN)!}{k!(pN-k)!}\times\frac{(qN)!}{(n-k)!(qN-(n-k))!}}{\frac{N!}{(N-n)!}}\\ &= \frac{\frac{(pN)!}{k!(pN-k)!}\times\frac{(qN)!}{(n-k)!(qN-(n-k))!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}\\ &= \frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout } k \text{ compris entre } \max(0,n-N_r) \text{ et } \min(n,N_b),\ P(X=k)=\frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}.}$

5. Si $0\leqslant k<n-N_r$, alors $n-k>N_r$ et donc $\binom{N_r}{n-k}=0$. Or dans ce car l'événement $[X=k]$ est impossible car on ne peut pas extraire plus de boules rouges que le nombre initialement présent dans l'urne. Donc $P(X=k)=0$. La formule précédente est donc encore valable.
Si $k>N_b$ alors $\binom{N_b}{k}=0$ et de nouveau l'événement $[X=k]$ est impossible (on ne peut pas obtenir plus de boules blanches que le nombre initialement prévu dans l'urne) donc $P(X=k)=0$. La formule est donc encore valable.
Enfin, si $k>n$ alors $n-k<0$ donc $\binom{N_r}{n-k}=0$ et de nouveau l'événement $[X=k]$ est impossible (on ne peut pas avoir plus de boules blanches que le nombre de tirages effectués) donc $P(X=k)=0$. La formule est donc encore valable.
$\boxed{\text{La formule de la question précédente est valable pour tout } k\in[\![0;N]\!].}$

6. $([X=k])_{k\in[\![0;n]\!]}$ étant un système complet d'événements on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N}P(X=K)=1 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}=1\\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}=\binom{N}{n}\\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}=\binom{pN+qN}{n}\\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}=\binom{a+b}{n} && \text{en posant } a=Np \text{ et } b=Nq.\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}=\binom{a+b}{n}.}$

7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.
Si $k > n$, $k\binom{n}{k} = 0$ et $n\binom{n-1}{k_1} = 0$. Donc la formule est vraie.
Si $k \leqslant n$,
$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
$\boxed{\forall (k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N},\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.}$

8. X étant une variable aléatoire réelle finie, $E(X)$ existe et
$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n} k\frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} k\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} pN\binom{pN-1}{k-1}\binom{qN}{n-k} && \text{question 7.} \\
&= \frac{pN}{\binom{N}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{pN-1}{i}\binom{qN}{n-1-i} && i = k-1 \\
&= \frac{pN}{\binom{N}{n}} \binom{pN-1+qN}{n-1} && \text{Formule de Vandermonde} \\
&= \frac{pN}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1} && \text{car } pN + qN = N \\
&= pN \times \frac{n}{N} && \text{question 7.} \\
&= np.
\end{aligned}$$
On a bien $\boxed{E(X) = np.}$

9. X est une VAR finie donc X admet une variance.
D'après la formule de Kœnig-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
On utilise ici une astuce classique qui consiste à écrire que $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$.
D'après la formule de transfert,
$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &== \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X=k) \\
&= 0 + 0 + \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=2}^{n} pN(pN-1)\binom{pN-2}{k-2}\binom{qN}{n-k} && \text{question 7. deux fois de suite} \\
&= \frac{pN(pN-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{pN-2}{i}\binom{qN}{n-2-i} && i = k-2 \\
&= \frac{pN(pN-1)}{\binom{N}{n}} \binom{pN-2+qN}{n-2} && \text{Formule de Vandermonde} \\
&= \frac{pN(pN-1)}{\binom{N}{n}} \binom{N-2}{n-2} && \text{car } pN + qN = N \\
&= pN(pN-1) \times \frac{n(n-1)}{N(N-1)} && \text{question 7.} \\
&= \frac{np(pN-1)(n-1)}{N-1}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 \\
&= \frac{np(pN-1)(n-1)}{N-1} + np - (np)^2 \\
&= np\left[\frac{(pN-1)(n-1)}{N-1} + 1 - np\right] \\
&= np \times \frac{(pN-1)(n-1) + (N-1)(1-np)}{N-1} \\
&= np \times \frac{-pN - n + N + np}{N-1} \\
&= \frac{np(1-p)(N-n)}{N-1}.
\end{aligned}$$

$\boxed{V(X) = \frac{np(1-p)(N-n)}{N-1}.}$

10. On effectue maintenant l'expérience d'un seul tirage de n boules d'un seul coup dans une urne contenant N boules au total, pN blanches et qN rouge. On note Ω' l'univers de notre expérience et Y la VAR égale au nombre de boule blanche présentes dans notre tirage.

    On a ici $\text{card}(\Omega') = \binom{N}{n}$ (« sans ordre et sans répétition ») et $Y(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$.

    De plus, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\text{card}([Y=k]) = \binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}$ (principe multiplicatif appliqué au fait d'avoir k boules blanches prises parmi les pN et $n-k$ boules rouge prises parmi les qN).

    Donc, $P(Y=k) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}} = P(X=k)$.

    $\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi.}}$