

Programme de colle de la semaine n° 18

23 au 27 février 2026

La démonstration des propriétés en **gras** pourra faire l'objet d'une question de cours.

Probabilités : Variables aléatoires réelles à densité

Reprendre tout le programme de la semaine 16 sur ce chapitre (pas de démonstration exigible cette semaine sur le début du chapitre, uniquement des définitions ou énoncés de théorèmes) et y ajouter :

- Somme de deux variables à densité indépendantes : une densité de $Z = X + Y$ est le produit de convolution d'une densité de X et une densité de Y . **Attention** la formule du produit de convolution doit toujours être rappelée aux étudiants.
- Somme de deux lois normales indépendantes et généralisation au cas de n lois normales indépendantes (**on pourra demander en démonstration le cas de la somme de deux VAR indépendantes suivant une loi normale centrée réduite**).
- Simulation en Python des lois usuelles.

Algèbre : Réduction des endomorphismes et des matrices

- Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres : définitions et plusieurs caractérisations (en passant par le noyau, le caractère injectif ou inversible,...)
- Famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre
- Une famille obtenue en juxtaposant des bases de sous-espaces propres est libre.
- En dimension finie : famille de n vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est une base (notion de base de vecteurs propres), f ou A admet au plus n valeurs propres, f et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ ont les mêmes valeurs propres, deux matrices semblables ont donc les mêmes valeurs propres.
- Méthodes de recherche de valeurs propres en cherchant les scalaires λ tels que $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$.
- Matrice ou endomorphisme diagonalisable : définition, f (ou A) est diagonalisable ssi la somme des dimensions des sous-espaces propre est égale à $\dim(E)$ (ou n), si f (ou A) admet $\dim(E)$ (ou n) valeurs propres distinctes alors f (ou A) est diagonalisable, toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable, méthode pour diagonaliser une matrice ou un endomorphisme.
- Application de la réduction au calcul de puissances de matrices.

Les **démonstrations exigibles** sont les suivantes :

- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- Si $A = PBP^{-1}$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$.

À venir : couples de VAR discrètes.