Banque Agro-véto 2017 Maths

Correction

Exercice :

1. La matrice A est triangulaire donc on peut lire ses valeurs propres sur la diagonale. 0 est la seule valeur propre de A.

   De plus, après résolution de l'équation $AX = 0$, on obtient :
$$E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$
   Comme $\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_0(A)$, on a $\dim(E_0(A)) = 1 \neq 3$, donc A n'est pas diagonalisable.

2. $A^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

3. a) On a dans cette question
$$AM = \alpha A + \beta A^2 + \gamma A^3 = \alpha A + \beta A^2 \text{ et } MA = \alpha A + \beta A^2 + \gamma A^3 = \alpha A + \beta A^2.$$
   Donc $M \in \mathscr{S}$.

   b) On a ici :
$$AM = MA \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b&c&0\\e&f&0\\h&i&0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=c=f=0\\ a=e=i\\ d=h\end{array}\right. .$$
   On a donc $M = \begin{pmatrix}a&0&0\\d&a&0\\g&d&a\end{pmatrix} = aI_3 + dA + gA^2$.

4. D'après la question précédente, $M \in \mathscr{S}$ si, et seulement si, $M \in \text{Vect}(I_3, A, A^2)$.

5. a) On a $M^2 = PAP^{-1} \times PAP^{-1} = PA^2P^{-1} \neq 0$ car P et P^{-1} sont inversibles et $A^2 \neq 0$.
   De plus $M^3 = PA^2P^{-1} \times PAP^{-1} = PA^3P^{-1} = 0$.
   Donc $M \in \mathscr{S}'$.

   b) (i) $M^2 = \begin{pmatrix}2&2&-2\\0&0&0\\2&2&-2\end{pmatrix} \neq 0$ et $M^3 = 0$.
   Donc $M \in \mathscr{S}'$.

   (ii) M^2 étant la matrice de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a par exemple $f^2(1,0,0) = (2,0,2) \neq 0$.
   On peut donc prendre $\overrightarrow{x} = (1,0,0)$.

   (iii) Avec le choix fait dans la question précédente on a : $B = ((1,0,0), (-1,1,0), (2,0,2))$.
   On cherche tous les réels a, b et c tels que :
$$a(1,0,0) + b(-1,1,0) + c(2,0,2) = (0,0,0) \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$
   Donc la famille $\mathscr{B}$ est libre et $\text{card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (iv) Comme
$$\begin{array}{r} f(\overrightarrow{x}) = 0\overrightarrow{x} + 1f(\overrightarrow{x}) + 0f^2(\overrightarrow{x})\\ f(f(\overrightarrow{x})) = 0\overrightarrow{x} + 0f(\overrightarrow{x}) + 1f^2(\overrightarrow{x})\\ f(f^2(\overrightarrow{x})) = 0\overrightarrow{x} + 0f(\overrightarrow{x}) + 0f^2(\overrightarrow{x})\end{array}$$
   la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} = A$.

(v) A et M sont deux matrices associées au même endomorphisme f mais dans deux bases différentes donc, d'après la formule de changement de base, il existe P matrice inversible telle que $M = PAP^{-1}$.

c) (i) M^2 étant la matrice de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, f^2 n'est pas l'application nulle. Donc il existe nécessairement $\overrightarrow{x}$ tel que $f^2(\overrightarrow{x}) \neq 0$.

(ii) On cherche tous les réels a, b et c tels que :

$$a\overrightarrow{x} + bf(\overrightarrow{x}) + cf^2(\overrightarrow{x}) = (0,0,0) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} af(\overrightarrow{x}) + bf^2(\overrightarrow{x}) = 0 \\ af^2(\overrightarrow{x}) = 0 \end{array} \right. .$$

On a appliqué deux fois de suite l'endomorphisme f à l'égalité du départ.
On en déduit donc que $a\overrightarrow{x} + bf(\overrightarrow{x}) + cf^2(\overrightarrow{x}) = (0,0,0) \Rightarrow a = b = c = 0$.
Donc la famille $\mathscr{B}$ est libre et $\text{card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Comme

$$\begin{array}{l} f(\overrightarrow{x}) = 0\overrightarrow{x} + 1f(\overrightarrow{x}) + 0f^2(\overrightarrow{x}) \\ f(f(\overrightarrow{x})) = 0\overrightarrow{x} + 0f(\overrightarrow{x}) + 1f^2(\overrightarrow{x}) \\ f(f^2(\overrightarrow{x})) = 0\overrightarrow{x} + 0f(\overrightarrow{x}) + 0f^2(\overrightarrow{x}) \end{array}$$

la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$.

A et M sont deux matrices associées au même endomorphisme f mais dans deux bases différentes donc, d'après la formule de changement de base, il existe P matrice inversible telle que $M = PAP^{-1}$.

d) D'après les questions 5.a) et 5.c), $M \in \mathscr{S}'$ si, et seulement si, M est semblable à A.

Problème :

I. Préliminaires

1. $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

2. Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— Comme $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$, $\mathscr{P}(1)$ est bien vérifiée.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Comme X est une variable finie, elle admet un moment d'ordre 2 et une variance. De plus :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Donc :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}.$$

II. Étude d'un cas particulier

1. Deux possibilités s'offrent à nous après une expérience : soit on a tiré une boule blanche et on a donc remis 2 boules blanches dans l'urne et dans ce cas $X_1 = 2$, soit on a tiré une boule noire et on a donc remis deux boules noires dans l'urne et dans ce cas $X_1 = 1$.

   Donc $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$ et $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \dfrac{1}{2}$. ($X_1$ suit la loi uniforme sur $[\![1; 2]\!]$.)

2. On a $X_2(\Omega) = [\![1; 3]\!]$. De plus :

$$P(X_2 = 1) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = P(B_1)P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

   De même, $P(X_2 = 2) = P((B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2)) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$ et $P(X_2 = 3) = P(B_1 \cap B_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

   Donc X_2 suit une loi uniforme sur $[\![1; 3]\!]$.

3. Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: X_n suit la loi uniforme sur $[\![1; n+1]\!]$, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   — D'après les questions précédentes, $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée.

   — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.

   Avant la $n+1^{\text{ème}}$ expérience, l'urne contient au plus $n+1$ boules blanches et au moins une boule blanche. Donc après la $n+1^{\text{ème}}$ expérience il y a entre 1 et $n+2$ boules blanches. $X_{n+1}(\Omega) = [\![1; n+2]\!]$.

   Pour tout $k \in X_{n+1}(\Omega)$, d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{i \in [\![1;n+1]\!]}$ on a :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = k) &= \sum_{i=1}^{n+1} P(X_n = i)P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k) \\
&= 0 + P(X_n = k-1)P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) + P(X_n = k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) + 0 \\
&\text{écriture qui n'a du sens que pour } k \neq 1 \text{ et } k \neq n+2 \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{k-1}{n+2} + \frac{1}{n+1}\frac{n+2-k}{n+2} \\
&= \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

   Pour $k = 1$, on a $P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$.

   Pour $k = n+2$, on a

$$P(X_{n+1} = n+2) = P(X_n = n+1)P_{[X_n=n+1]}(X_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+1}.$$

   Donc X_{n+1} suit bien une loi uniforme sur $[\![1; n+2]\!]$.

   Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi uniforme sur $[\![1; n+1]\!]$.

4. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{i \in [\![1;n+1]\!]}$ on a :

$$\begin{aligned}
P(B_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} P(X_n = i)P_{[X_n=i]}(B_{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{i}{n+2} \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

5. a) $Y_n(\Omega) = \left\{\dfrac{k}{n} / k \in [\![0; n]\!]\right\}$.

   $P\left(Y_n = \dfrac{k}{n}\right) = P(X_n = k+1) = \dfrac{1}{n+1}$.

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$

c) $P(Y_n \leqslant x) = P(X_n \leqslant nx+1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\lfloor nx+1 \rfloor} P(X_n = i)$, car X_n ne prend que des valeurs entières.

Donc $P(Y_n \leqslant x) = \dfrac{\lfloor nx+1 \rfloor}{n+1}$.

d) Les valeurs prises par Y_n sont dans l'intervalle $[0;1]$ donc si $x < 0$, $F_{Y_n}(x) = 0$ et si $x > 1$, $F_{Y_n}(x) = 1$. Donc pour $x < 0$ ou $x > 1$ on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = F(x)$.

si $x \in [0;1]$, d'après la question précédente $F_{Y_n}(x) = \dfrac{\lfloor nx+1 \rfloor}{n+1}$ et donc d'après les propriétés de la partie entière :

$$\frac{nx}{n+1} \leqslant F_{Y_n}(x) \leqslant \frac{nx+1}{n+1}.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{nx}{n+1} = x = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{nx+1}{n+1}$.
Ainsi, par encadrement de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = x = F(x)$.

III. Retour au cas général

1. $P(B_1) = \dfrac{N_1}{N}$ et d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $(B_1, \overline{B_1})$:

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(B_2) \\ &= \frac{N_1}{N} \times \frac{N_1+1}{N+1} + \frac{N_2}{N} \times \frac{N_1}{N+1} \\ &= \frac{N_1(N_1+1+N_2)}{N(N+1)} = \frac{N_1}{N} \end{aligned}$$

2. a) D'après la description des expériences successives, on a $X_{n-1}(\Omega) = [\![N_1; N_1+n-1]\!]$.
Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_{n-1} = k])_{k \in [\![N_1;N_1+n-1]\!]}$

$$\begin{aligned} P(B_n) &= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(X_{n-1} = k) P_{[X_{n-1}=k]}(B_n) \\ &= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(X_{n-1} = k) \times \frac{k}{N+n-1}. \end{aligned}$$

On obtient donc bien $\displaystyle\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} kP(X_{n-1} = k) = (N+n-1)P(B_n)$.

b) $P_{[X_{n-1}=k] \cap B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{k+1}{N+n}$ et $P_{[X_{n-1}=k] \cap \overline{B_n}}(B_{n+1}) = \dfrac{k}{N+n}$.

c) La famille d'événements $([X_{n-1} = k] \cap B_n, [X_{n-1} = k] \cap \overline{B_n})_{k \in [\![N_1;N_1+n-1]\!]}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales on a donc :

$$\begin{aligned}
P(B_{n+1}) &= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \Big(P([X_{n-1}=k]\cap B_n) P_{[X_{n-1}=k]\cap B_n}(B_{n+1}) + P([X_{n-1}=k]\cap \overline{B_n}) P_{[X_{n-1}=k]\cap \overline{B_n}}(B_{n+1}) \Big) \\
&= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \left(P([X_{n-1}=k]\cap B_n) \frac{k+1}{N+n} + P([X_{n-1}=k]\cap \overline{B_n}) \frac{k}{N+n} \right) \\
&= \frac{1}{N+n} \left(\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \left(P([X_{n-1}=k]\cap B_n) + k \underbrace{\big(P([X_{n-1}=k]\cap B_n) + P([X_{n-1}=k]\cap \overline{B_n}) \big)}_{P(X_{n-1}=k)} \right) \right) \\
&= \frac{1}{N+n} \left(\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \left(P([X_{n-1}=k]\cap B_n) + kP(X_{n-1}=k) \right) \right) \\
&= \frac{1}{N+n} \left(\underbrace{\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P([X_{n-1}=k]\cap B_n)}_{\text{formule des probas totales}} + \underbrace{\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} kP(X_{n-1}=k)}_{\text{question 2.a)}} \right) \\
&= \frac{1}{N+n} \left(P(B_n) + (N+n-1)P(B_n) \right) \\
&= P(B_n).
\end{aligned}$$

3. D'après les question 1. et 2.c), $P(B_n) = \dfrac{N_1}{N}$ et d'après la question 2.a), $E(X_n) = (N+n)P(B_{n+1}) = \dfrac{N_1(N+n)}{N}$.