

Programme de colle de la semaine n° 16

26 au 30 janvier 2026

La démonstration des propriétés en **gras** pourra faire l'objet d'une question de cours.

Analyse : Intégrales généralisées

- Notion d'intégrale impropre ou généralisée.
- Définition d'une intégrale convergente ou divergente lorsque f est une fonction continue (ou continue sauf en un nombre fini de points) sur des intervalles du type $]a; b]$, $[a; b[$, $]a; b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Dans le cas où a et b sont des réels, notion d'intégrale « faussement » impropre.
- Propriétés : linéarité, positivité, stricte positivité, relation de Chasles.
- Intégration par parties généralisée : j'ai conseillé aux étudiants de repasser par une intégrale sur un segment.
- Théorème de changement de variable généralisé.
- **Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un intervalle du type $] - a; a[$.**
- **Nature et valeur de l'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ avec $\alpha > 0$.**
- Notion d'intégrale absolument convergente. Convergence absolue entraîne convergence.
- Critères de majoration et de minoration pour les intégrales de fonctions positives.
- Critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives.
- Intégrale de référence $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. **Démonstration uniquement de la convergence.**

Probabilités : Variables aléatoires réelles à densité

- Notion de densité de probabilité.
- Définition de la notion de variable à densité.
- Caractérisation des variables à densité par l'intermédiaire de la fonction de répartition.
- Toute densité de probabilité est la densité d'une VAR à densité.
- **Pour une variable à densité $P(X = a) = 0$, et $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(t) dt$.**
- Espérance d'une variable à densité : définition, linéarité, théorème de transfert.
- Existence de l'espérance pour une VAR à densité nulle en dehors d'un segment.
- Moment d'ordre r , variance.
- Lois usuelles : loi uniforme (densité, **fonction de répartition**, **espérance**, **variance**), loi exponentielle (densité, **fonction de répartition**, **espérance**, **variance**).
- Loi normale centrée réduite : densité, fonction de répartition noté Φ , $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, **$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$** , **espérance** et variance.
- Loi normale de Laplace-Gauss : densité, espérance, variance, si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et réciproquement.
- Exemples de fonctions d'une variable à densité : méthode pour déterminer la loi de $Y = g(X)$ lorsque X est une variable à densité donnée.

À venir : fin des variables à densité, réduction