Séries réelles

I Généralités sur les séries

1 Définitions

Définition 1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle **série de terme général u_n**, et on note $\sum u_n$, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad S_N = u_0 + u_1 + \ldots + u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Le réel S_N s'appelle la **somme partielle d'indice N de la série $\sum u_n$**.

Notation :
Lorsque la suite u n'est pas définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais juste pour $n \geqslant n_0$, la série de terme général u_n se note $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et ses sommes partielles sont $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$ (et donc n'existent que pour $N \geqslant n_0$).

Exemples 1 :

— Pour la série $\sum n$, la somme partielle d'indice N est : $S_N = \sum_{n=0}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$.

— Pour la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, la somme partielle d'indice N est : $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. On ne peut pas simplifier plus cette expression.

Définition 2
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\sum u_n$ la série de terme général u_n.

On dit que **la série $\sum u_n$ est convergente** si, et seulement si, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ (où $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$) admet une limite finie quand $N \to +\infty$, .

Cette limite s'appelle **la somme de la série $\sum u_n$** et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Lorsque la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite infinie ou n'admet pas de limite, on dit que **la série $\sum u_n$ est divergente**.

Remarques :

— Pour la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$, en cas de convergence, la somme se note $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

— Lorsqu'on cherche à savoir si une série donnée est convergente ou divergente, on dit que l'on détermine **la nature de la série**.

— **Attention** à ne pas confondre la série $\sum u_n$ (qui est une suite) et la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (qui est un nombre réel).

Pour formuler les choses encore différemment $\sum u_n = (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_N$.

Conseils méthodologiques :

Cette définition nous donne une première méthode pour répondre à la question « $\sum u_n$ est-elle convergente ? » ou « quelle est la nature de la série $\sum u_n$? »(il existe d'autres méthodes pour répondre à ces questions).

1. Pour $N \in \mathbb{N}$ quelconque, on calcule $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.
2. Ensuite on calcule $\lim_{N \to +\infty} S_N$.
3. Et enfin on conclut.

Exemple 2 :

Quelle est la nature de la série $\sum (2n+1)$?

— Calculons tout d'abord les sommes partielles de cette série :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad S_N = \sum_{n=0}^{N}(2n+1) = 2\sum_{n=0}^{N} n + \sum_{n=0}^{N} 1 = 2\frac{N(N+1)}{2} + N + 1 = (N+1)^2$$

— Cherchons maintenant la limite de la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} (N+1)^2 = +\infty$$

— En conclusion la série $\sum (2n+1)$ est divergente.

Exemple 3 :

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{2^n}$ est convergente et calculer sa somme.

— Calculons tout d'abord les sommes partielles de cette série :

$$\forall N \geqslant 2, \quad S_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\right)$$

— Cherchons maintenant la limite de la suite $(S_N)_{N\geqslant 2}$. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a :

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\right) = \frac{1}{2}$$

— En conclusion la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{2^n}$ est convergente et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$.

Exemple 4 :

Étudions la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(n-1)}$.

— Calculons les somme partielle d'indice N pour tout $N \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} S_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \qquad \text{astuce à retenir} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \dots \\ &\qquad + \left(\frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1}\right) + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) = 1 - \frac{1}{N} \end{aligned}$$

somme téléscopique

— Déterminons maintenant la limite de la suite $(S_N)_{N\geqslant 2}$: $\lim\limits_{N\to+\infty} S_n = \lim\limits_{N\to+\infty} 1-\dfrac{1}{N} = 1$

— En conclusion, la série $\sum \dfrac{1}{n(n-1)}$ est convergente et $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n-1)} = 1$.

2 *Terme général d'une série convergente*

Pour toute la suite de ce chapitre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle et $\sum u_n$ la série de terme général u_n.

Théorème 1
SI la série $\sum u_n$ est convergente **ALORS** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration :

Il suffit ici de remarquer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Comme on a supposé que la série $\sum u_n$ est convergente, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell \in \mathbb{R}$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = \ell - \ell = 0$.
On a donc bien montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

□

Remarques :

— **ATTENTION** la réciproque à ce théorème est en général fausse ! ! ! ! Nous verrons un contre exemple dans la partie suivante.

— La contraposée de ce théorème sera très utile en exercice. La voici ci-dessous.

Corollaire 1
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum u_n$ est divergente. On dit alors que la série est **grossièrement divergente**.

Conseils méthodologiques :
Ce corollaire donne une méthode pour montrer qu'une série est divergente : il suffit de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.

Exemples 5 :

— La série $\sum \mathrm{e}^n$ est grossièrement divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$.

— La série $\sum \cos(n)$ est grossièrement divergente car $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Par contre, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on ne peut absolument **RIEN** dire sur la nature de la série sans faire plus de calculs !

3 Premières séries de référence

a Série géométrique et ses dérivées

Définition 3
Soit $q \in \mathbb{R}$. La série $\sum q^n$ s'appelle la **série géométrique de raison q**.

Théorème 2 : Sommes partielles des séries géométriques
Soient N et p deux entiers naturels tels que $p < N$, et soit $q \in \mathbb{R}$.

— Si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{n=p}^{N} q^n = N - p + 1$.

— Si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{n=p}^{N} q^n = q^p \times \frac{1-q^{N-p+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$.

Remarque :
La démonstration du cas $q \neq 1$ se fait par récurrence sur N.

Théorème 3 : Nature des séries géométriques
La série $\sum q^n$ est convergente si, et seulement si, $|q| < 1$.

Théorème 4 : Somme des séries géométriques
Si $|q| < 1$ alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=p}^{+\infty} q^n = q^p \times \frac{1}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1}{1-q}.$$

Remarque :
La démonstration de ces deux théorèmes est immédiate en utilisant la valeur des sommes partielles et en faisant tendre N vers $+\infty$.

Théorème 5 : Séries « dérivées » de la série géométrique

— La série $\sum nq^{n-1}$ s'appelle **la série dérivée première de la série géométrique de raison q**. Cette série est convergente si, et seulement si, $|q| < 1$ et, en cas de convergence, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

— La série $\sum n(n-1)q^{n-2}$ s'appelle **la série dérivée seconde de la série géométrique de raison q**. Cette série est convergente si, et seulement si, $|q| < 1$ et, en cas de convergence, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Remarque :

Lorsque $|q| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2}$.

Démonstration :

— On peut commencer par remarquer que, pour $|q| \geqslant 1$, les deux séries $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ sont grossièrement divergentes.

— On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1;1[$, $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n$.

On sait que, pour tout $x \in]-1;1[$, $f_N(x) = \dfrac{1-x^{N+1}}{1-x}$.

La fonction f_N est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et, pour tout $x \in]-1;1[$:

$$f'_N(x) = \sum_{n=1}^{N} nx^{n-1} = \frac{-(N+1)x^N(1-x) + (1-x^{N+1})}{(1-x)^2} = \frac{Nx^{N+1} - (N+1)x^N + 1}{(1-x)^2}$$

$$f''_N(x) = \sum_{n=2}^{N} n(n-1)x^{n-2} = \frac{-N(N-1)x^{N+1} + 2(N+1)(N-1)x^N - N(N+1)x^{N-1} + 2}{(1-x)^3}$$

Pour $|x| < 1$, on sait que $\lim_{N\to+\infty} x^N = 0$ et d'après les croissances comparées $\lim_{N\to+\infty} N^\alpha x^N = 0$.

On en déduit donc que, pour $|x| < 1$, $\left(\sum_{n=1}^{N} nx^{n-1}\right)_{N\geqslant 1}$ et $\left(\sum_{n=2}^{N} n(n-1)x^{n-2}\right)_{N\geqslant 2}$ ont des limites finies, respectivement égales à $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ et $\dfrac{2}{(1-x)^3}$.

En conclusion, les séries $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes si, et seulement si, $|q| < 1$ et en cas de convergence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

□

Exemple 6 : À savoir refaire vite et parfaitement

Déterminer la nature de la série $\sum nq^n$ et, en cas de convergence, déterminer la valeur de sa somme.

Si $|q| \geqslant 1$, la série $\sum nq^n$ est grossièrement divergente.

Soit maintenant $|q| < 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} nq^n = q \times \sum_{n=0}^{N} nq^{n-1}$.

On reconnait un somme de partielle de la série dérivée première de la série géométrique de raison q.
Comme $|q| < 1$, on sait que cette suite de sommes partielles admet une limite finie.

Donc, pour $|q| < 1$, la série $\sum nq^n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = q \times \dfrac{1}{(1-q)^2}$.

Exemple 7 : À savoir refaire vite et parfaitement

Déterminer la nature de la série $\sum n^2q^n$ et, en cas de convergence, déterminer la valeur de sa somme.

Si $|q| \geqslant 1$, la série $\sum n^2q^n$ est grossièrement divergente.

Si $|q| < 1$, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} n^2q^n = \sum_{n=0}^{N} (n(n-1)+n)q^n = q^2 \sum_{n=0}^{N} n(n-1)q^{n-2} + q \sum_{n=0}^{N} nq^{n-1}.$$

On reconnait ici des sommes partielles des séries dérivées première et seconde de la série géométrique de raison q. Comme $|q| < 1$, on sait que ces suites sommes partielles ont des limites finies.

Donc, pour $|q| < 1$, $\sum n^2q^n$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2q^n = q^2\frac{2}{(1-q)^3} + \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}.$$

b Série harmonique

Théorème 6

La **série harmonique** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est divergente.

Démonstration :

On peut remarquer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, mais cette information ne nous indique rien sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$.

On peut par contre remarquer que : $\forall t\in[n;n+1],\quad \dfrac{1}{t}\leqslant\dfrac{1}{n}$.

On a donc $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\,\mathrm{d}t$, ce qui donne $\ln(n+1)-\ln(n)\leqslant\dfrac{1}{n}$.

En sommant pour n allant de 1 à N ($N\in\mathbb{N}^*$), on obtient :

$$\sum_{n=1}^{N}(\ln(n+1)-\ln(n))\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\Leftrightarrow\ln(N+1)\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

Et comme $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\ln(N+1)=+\infty$, on obtient que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=+\infty$, c'est-à-dire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est divergente.

□

Remarques :

— Dans cet exemple, il était impossible de calculer la somme partielle $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$. Pour trouver tout de même sa limite nous nous sommes servi d'une inégalité. Nous verrons dans la partie II encore d'autres méthodes pour déterminer la nature d'une série. Il existe d'autres façons de démontrer ce résultat.

— La série harmonique illustre un fait qui peut paraitre surprenant : on ajoute à chaque étape un terme de plus en plus petit et pourtant la somme continue à croitre jusqu'à $+\infty$.
Cette somme croit extrêmement lentement : même en ajoutant 10^{43} termes la somme ne dépasse toujours pas 100...

Exemple 8 : Un grand classique

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$.

On a déjà vu que, pour tout $n\geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant\ln(n+1)$.

Pour obtenir une majoration de cette somme, on utilise une idée semblable à la démonstration précédente.

Soit $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Pour tout $t\in[k-1;k]$, $\dfrac{1}{k}\leqslant\dfrac{1}{t}$.

Par croissance de l'intégrale, on a donc $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, ce qui donne $\dfrac{1}{k}\leqslant\ln(k)-\ln(k-1)$.

En sommant pour k allant de 2 à n ($n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$), on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=2}^{n}(\ln(k)-\ln(k-1))=\ln(n).$$

En ajoutant 1 à chaque membre de l'inégalité on a donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1.$$

En résumé

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

On remarque alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{\ln(n)} = 1$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1$$

Donc, par encadrement de limites, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1$, c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

4 Propriétés

Propriété 1
La nature d'une série ne dépend pas des premiers termes, autrement dit :

$$\text{pour tout } n_0 \in \mathbb{N}, \sum_{n\geqslant n_0} u_n \text{ et } \sum u_n \text{ sont de même nature.}$$

Remarque :

Attention les séries $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature mais n'ont pas la même somme en cas de convergence!!!

Propriété 2 : Combinaison linéaire de séries convergentes
Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles et λ et μ deux réels fixés.
Si les séries $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ sont convergentes, **alors** la série $\sum_{n\geqslant n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et on a :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration :

Pour tout $N \geqslant n_0$:

$$(1) \qquad \sum_{n=n_0}^{N} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{N} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{N} v_n,$$

car on peut réordonner une somme finie.

De plus, les suites $\left(\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right)_{N\geqslant n_0}$ et $\left(\sum_{n=n_0}^{N} v_n\right)_{N\geqslant n_0}$ admettent des limites finies.

Donc par opérations sur les limites, $\left(\sum_{n=n_0}^{N} (\lambda u_n + \mu v_n)\right)_{N\geqslant n_0}$ admet une limite finie, ce qui signifie que la série $\sum_{n\geqslant n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et on a, par passage à la limites dans la relation (1) :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

□

Exemple 9 :
On considère les suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad v_n = (-1)^{n+1}.$$

Les suites u et v n'admettent pas de limites donc les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergente.

On remarque alors que, pour tout entier n, $u_n + v_n = 0$. Donc la série $\sum (u_n + v_n)$ est convergente car ses sommes partielles sont nulles.

Remarque :
— Il n'existe de pas de résultat donnant la nature d'une somme de deux séries divergentes.
— L'étude de la nature du produit de deux séries est hors-programme en BCPST.

II Théorèmes de convergence pour les séries à termes positifs

1 *Une propriété intermédiaire sur les séries à termes positifs*

Propriété 3
Soit $\sum u_n$ une série à **termes positifs**.
Alors la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est croissante.

Démonstration :

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{N+1} - S_N = (u_0 + u_1 + \ldots + u_{N+1}) - (u_0 + u_1 + \ldots + u_N) = u_{N+1}$$

Or on sait que la suite u est une suite à termes positifs. Donc $u_{N+1} \geqslant 0$, ce qui nous permet donc de montrer que la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante.

□

Théorème 7
Soit $\sum u_n$ une série à **termes positifs**.
La série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration :

$\Longrightarrow$

Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors par définition, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente. Or toue suite convergente est bornée donc la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée.

$\Longleftarrow$

On suppose maintenant que la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée. On souhaite montrer que la série $\sum u_n$ est convergente ce qui signifie que la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente.

D'après la propriété précédente, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Ainsi la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente et ainsi la série $\sum u_n$ est convergente.

□

Conseils méthodologiques :

Voici donc deux nouvelles méthodes pour étudier la nature d'une série à **termes positifs** :

— S'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $N\in\mathbb{N}$, $S_N\leqslant M$ alors la série $\sum u_n$ est convergente.

— Si, pour tout $N\geqslant n_0$, on a $S_N\geqslant w_N$ avec $\lim\limits_{N\to+\infty} w_N=+\infty$ alors la série $\sum u_n$ est divergente.

Même si nous allons peu utiliser ces méthodes dans la feuille de TD, il faut bien retenir ce théorème car dans un problème il peut être utile !

2 *Les théorèmes de convergence*

a Les théorèmes de comparaison

Théorème 8 : Majoration de u_n par le terme général d'une série convergente

$$\textbf{Si } \begin{cases} \forall n\geqslant n_0,\ 0\leqslant u_n\leqslant v_n \\ \sum v_n \text{ est convergente} \end{cases} \textbf{ alors } \sum u_n \text{ est convergente.}$$

Démonstration :

On sait que pour tout $n\geqslant n_0$, on a $0\leqslant u_n\leqslant v_n$.

En sommant cette égalité pour n allant de n_0 à N (avec $N\geqslant n_0$) on obtient :

$$0\leqslant \sum_{n=n_0}^{N} u_n\leqslant \sum_{n=n_0}^{N} v_n$$

La série $\sum v_n$ est à termes positifs, donc la suite $\left(\sum_{n=n_0}^{N} v_n\right)_{N\geqslant n_0}$ est croissante.

De plus, on suppose que la série $\sum v_n$ est convergente donc la suite $\left(\sum_{n=n_0}^{N} v_n\right)_{N\geqslant n_0}$ est convergente.

La suite $\left(\sum_{n=n_0}^{N} v_n\right)_{N\geqslant n_0}$ est donc majorée par sa limite, c'est-à-dire : $\forall N\geqslant n_0,\quad \sum_{n=n_0}^{N} v_n\leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

À retenir : une suite croissante et convergente est majorée par sa limite.

On obtient alors, pour tout $N\geqslant n_0$, $\sum_{n=n_0}^{N} u_n\leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ et donc la suite $\left(\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right)_{N\geqslant n_0}$ est majorée.

De plus, la série $\sum u_n$ est à termes positifs, donc la suite $\left(\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right)_{N \geqslant n_0}$ est croissante.

À retenir : une suite croissante et divergente tend forcément vers $+\infty$.

D'après le théorème de la limite monotone, la suite $\left(\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right)_{N \geqslant n_0}$ est convergente, c'est-à-dire que la série $\sum u_n$ est convergente.

□

Théorème 9 : Minoration de u_n par le terme général d'une série divergente

Si $\begin{cases} \forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant v_n \leqslant u_n \\ \sum v_n \text{ est divergente} \end{cases}$ **alors** $\sum u_n$ est divergente.

Démonstration :

De même que dans la démonstration précédente, on a : $0 \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} v_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} u_n$. Et on sait ici que la série $\sum v_n$ est divergente.

Comme $\sum v_n$ est une série à termes positifs, on a nécessairement $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=n_0}^{N} v_n = +\infty$.

Par comparaison de limites, on a donc $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=n_0}^{N} u_n = +\infty$.

La série $\sum u_n$ est donc divergente.

□

Remarques :

Il existe deux cas où on ne peut rien dire :

- Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ est divergente, on ne peut rien dire sur $\sum u_n$.
- Si $u_n \geqslant v_n \geqslant 0$ et $\sum v_n$ est convergente, on ne peut rien dire sur $\sum u_n$.

Théorème 10 : Une nouvelle série de référence

La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Remarques :

- Les séries du type $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ s'appellent les **séries de Riemann**. **HORS PROGRAMME**
- On sait calculer la valeur de la somme $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (fonction zêta de Riemann) pour tout α entier pair supérieur ou égal à deux mais on ne sait pas calculer cette somme pour les autres valeurs de $\alpha \in \mathbb{C}$. C'est encore un problème ouvert en mathématiques (en particulier les mathématiciens s'intéressent beaucoup aux valeurs de α qui annulent la fonction ζ).

Démonstration :

L'astuce consiste ici à remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $n \geqslant n-1$ et donc $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$.

Nous avons vu dans l'exemple 4 que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente.

D'après le théorème de majoration pour les séries à termes positifs on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

□

b Le théorème des équivalents

Théorème 11 : Critère des équivalents pour les séries à termes positifs

Si $\begin{cases} \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant 0 \text{ et } v_n \geqslant 0 \\ u_n \sim v_n \end{cases}$ **alors** $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration :

On suppose dans toute la démonstration que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes positifs et que $u_n \sim v_n$.

— Mise en place préliminaire : comme $u_n \sim v_n$, on sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$, ce qui signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \geqslant n_0$, tel que :

$$\forall n \geqslant n_\varepsilon, \qquad \left| \frac{v_n}{u_n} - 1 \right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon \leqslant \frac{v_n}{u_n} \leqslant 1 + \varepsilon.$$

On choisit dans cette démonstration de prendre $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ et on note $n_{1/2}$ l'entier tel que :

$$\forall n \geqslant n_{1/2}, \qquad \frac{1}{2} \leqslant \frac{v_n}{u_n} \leqslant \frac{3}{2}.$$

— Supposons que $\sum u_n$ est convergente : On a alors $\begin{cases} \forall n \geqslant n_{1/2},\ 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{3}{2} u_n \\ \sum \dfrac{3}{2} u_n \text{ est convergente.} \end{cases}$

D'après le théorème de majoration pour les séries à termes positifs, on peut alors affirmer que $\sum v_n$ est convergente.

— Supposons que $\sum u_n$ est divergente : On a alors $\begin{cases} \forall n \geqslant n_{1/2},\ 0 \leqslant \dfrac{1}{2} u_n \leqslant v_n \\ \sum \dfrac{1}{2} u_n \text{ est divergente.} \end{cases}$

D'après le théorème de minoration pour les séries à termes positifs, on peut alors affirmer que $\sum v_n$ est divergente.

En conclusion, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

□

c Des exemples

Conseils méthodologiques :

On dispose donc de trois nouvelles méthodes pour étudier la nature de la série **à termes positifs** $\sum u_n$:

- Majorer u_n par le terme général d'une série convergente (alors $\sum u_n$ converge).
- Minorer u_n par le terme général d'une série divergente (alors $\sum u_n$ diverge).
- Déterminer un équivalent simple de u_n (que l'on appelle v_n) et déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

Lorsqu'on utilise une des deux premières méthodes on dit que l'on utilise « les critères de comparaison sur les séries à termes positifs » et lorsqu'on utilise la troisième méthode on dit que l'on utilise « le critère des équivalents pour les séries à termes positifs ».

Exemple 10 :

Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

On peut remarquer ici que, pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{\ln(2)}{n} \geqslant 0$

On sait que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$ est divergente. Donc (par multiplication par un scalaire) la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln(2)}{n}$ est divergente.

Ainsi, d'après le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

Exemple 11 :

On souhaite déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{e^{1/n}-1}{n}\right)$.

On commence par remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{e^{1/n}-1}{n} \geqslant 0$.

De plus on sait que $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $e^{1/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. On a donc $\frac{e^{1/n}-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Or on sait que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Donc, d'après le théorème des équivalents sur les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{e^{1/n}-1}{n}\right)$ est convergente.

III Séries de référence : complément et utilisation

1 Série exponentielle

Nous avons déjà vu 5 séries de référence : la série harmonique, la série géométrique et ses deux dérivées et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

Voici une dernière série de référence.

Théorème 12
Pour tout réel x, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.$$

Cette série est appelée **série exponentielle**.

Remarque :
Théorème admis en BCPST.

2 *Exemple d'utilisation des séries de référence*

Exemple 12 :

Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+(n+1)!}{n!}\mathrm{e}^{-2n}$ est convergente et déterminons la valeur de sa somme.

Pour tout $N \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{n^2+(n+1)!}{n!}\mathrm{e}^{-2n} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2}{n!}\mathrm{e}^{-2n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{(n+1)!}{n!}\mathrm{e}^{-2n} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-2n} + \sum_{n=1}^{N} (n+1)\mathrm{e}^{-2n} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{j+1}{j!}\mathrm{e}^{-2(j+1)} + \sum_{i=2}^{N+1} i\mathrm{e}^{-2(i-1)} \\
&\text{on a posé } j=n-1 \text{ dans la première somme et } i=n+1 \text{ dans la seconde} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{j}{j!}\mathrm{e}^{-2(j+1)} + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!}\mathrm{e}^{-2(j+1)} + \sum_{i=2}^{N+1} i\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^{i-1} \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(j-1)!}\mathrm{e}^{-2(j+1)} + \mathrm{e}^{-2}\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!}\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^{j} + \sum_{i=2}^{N+1} i\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^{i-1} \\
&= \sum_{p=0}^{N-2} \frac{1}{p!}\mathrm{e}^{-2(p+2)} + \mathrm{e}^{-2}\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!}\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^{j} + \sum_{i=2}^{N+1} i\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^{i-1} \\
&\text{on a posé } p=j-1 \\
&= \mathrm{e}^{-4}\sum_{p=0}^{N-2} \frac{1}{p!}\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^{p} + \mathrm{e}^{-2}\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!}\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^{j} + \sum_{i=2}^{N+1} i\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^{i-1}
\end{aligned}$$

Or on sait que la série $\sum \frac{1}{n!}\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^n$ est convergente car on reconnait la série exponentielle pour $x = \mathrm{e}^{-2}$.

Donc dans l'expression ci-dessus, les deux premières sommes partielles admettent des limites finies lorsque $N \to +\infty$.

De plus, la série $\sum n\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^{n-1}$ est convergente car c'est une série dérivée première de la série géométrique de raison e^{-2} et $|\mathrm{e}^{-2}| \leqslant 1$. Donc la troisième somme a aussi une limite finie.

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+(n+1)!}{n!}\mathrm{e}^{-2n}$ est convergente.

De plus

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+(n+1)!}{n!}\mathrm{e}^{-2n} = \mathrm{e}^{-4}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^p + \mathrm{e}^{-2}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^j + \sum_{i=2}^{+\infty} i\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^{i-1}$$

$$= \mathrm{e}^{-4}\times \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-2}} + \mathrm{e}^{-2}\times \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-2}} + \left(\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-2})^2}-1\right).$$

IV Convergence absolue

Définition 4
On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si, et seulement si, la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 13 : Convergence absolue ⇒ convergence
SI la série $\sum u_n$ est absolument convergente **ALORS** la série $\sum u_n$ est convergente.

Exemple 13 :

Comme on a vu que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\frac{1}{2^n}$ est convergente, on peut affirmer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{2^n}$ est absolument convergente et donc convergente.

Remarque :

La réciproque de ce théorème est en générale fausse : si la série $\sum u_n$ est convergente on ne peut pas donner, sans calculs, la nature de la série $\sum |u_n|$.

Les séries convergentes mais pas absolument convergentes s'appellent des séries **semi-convergentes**. Leur étude systématique est hors-programme, toutefois nous verrons en exercice comment en étudier certaines.

Conseils méthodologiques :
Voici donc encore une technique montrer qu'une série est convergente :

Si $\sum |u_n|$ est convergente alors $\sum u_n$ est convergente.

Exemple 14 :

Montrons que la série $\sum \frac{\cos(n)}{n^2+1}$ est convergente.
Attention, ici la série n'est pas à termes positifs.
On a donc l'idée de tenter de montrer que cette série est absolument convergente.
On remarque que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant\left|\frac{\cos(n)}{n^2+1}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$, car $|\cos(n)|\leqslant 1$ et $n^2+1\geqslant n^2$.
Or on sait que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente.

Donc, d'après le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left|\frac{\cos(n)}{n^2+1}\right|$ est convergente.

Ainsi la série $\sum \frac{\cos(n)}{n^2+1}$ est absolument convergente et elle est donc convergente.

Propriété 4

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors la valeur de la somme de cette série ne dépend pas de l'ordre d'énumération de ses termes.

Remarque :

Cette propriété sera surtout utilisée dans les chapitres de probabilités discrètes.