ENS filière BCPST 2018

Exercice 1

1. R est solution de l'équation différentielle $y' = y$ donc, d'après notre cours, on sait qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel t, $R(t) = K\mathrm{e}^t$. De plus, $R(0) = r$ donc $K = r$.
   En conclusion $R : t \mapsto r\mathrm{e}^t$.
   Et on a, par un simple calcul, $\displaystyle\int_0^t R(s)\ \mathrm{d}s = r(\mathrm{e}^t - 1)$.

2. Une primitive de $x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ est $x \mapsto x + \ln(x)$.
   On reconnait alors une dérivée d'une composée, ce qui nous permet de dire qu'une primitive de $t \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{B(t)}\right) B'(t)$ sur $]0;+\infty[$ est $t \mapsto B(t) + \ln(B(t))$.

3. L'énoncé peut laisser penser que la fonction A' n'est pas définie en 0 car il est uniquement indiqué que A est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$. Mais, grâce à l'égalité vérifiée par A', on peut remarquer que A' admet une limite finie en 0 (car A et R sont continues en 0).
   Ainsi, grâce au fait que A est continue sur $[0;+\infty[$, $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et A' admet une limite finie en 0, on peut affirmer que A est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$. (*on démontre avec le TFA que A est dérivable en 0 grâce à tous ces arguments*). Les intégrales qui entrent en jeu dans cette question sont donc des intégrales de fonctions continues sur des segment, ce ne sont pas des intégrales impropres.
   Comme l'énoncé nous dit que, pour tout $t \geqslant 0$, $A(t) \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
A'(t) = \frac{-A(t)R(t)}{A(t)+1} &\Leftrightarrow A'(t)\left(1 + \frac{1}{A(t)}\right) = -R(t)\\
&\Rightarrow \int_0^t A'(s)\left(1 + \frac{1}{A(s)}\right)\ \mathrm{d}s = -\int_0^t R(s)\ \mathrm{d}s\\
&\Rightarrow [A(s) + \ln(A(s))]_0^t = -r(\mathrm{e}^t - 1)\\
&\Rightarrow A(t) + \ln(A(t)) - 2 - \ln(2) = r(1 - \mathrm{e}^t)\\
&\Rightarrow \mathrm{e}^t = 1 - \frac{1}{r}\left(A(t) + \ln(A(t)) - 2 - \ln(2)\right)\\
&\Rightarrow t = \ln\left[1 - \frac{1}{r}\left(A(t) + \ln(A(t)) - 2 - \ln(2)\right)\right]
\end{aligned}$$

   Comme $\tau(r)$ est défini par $A(\tau(r))$, en remplaçant dans l'égalité ci-dessus on obtient :

$$\tau(r) = \ln\left[1 + \frac{1+\ln(2)}{r}\right].$$

4. La fonction τ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $r > 0$:

$$\tau'(r) = -\frac{1+\ln(2)}{r^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1+\ln(2)}{r}} = -\frac{1+\ln(2)}{r(r+1+\ln(2))} < 0.$$

   La fonction τ est donc strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
   Par simple calculs de limites on a $\lim\limits_{r \to 0^+} \tau(r) = +\infty$ et $\lim\limits_{r \to +\infty} \tau(r) = 0$.
   La fonction τ étant continue et décroissante, on peut affirmer (*théorème des valeurs intermédiaires*) que $\tau(]0;+\infty[) =]0;+\infty[$.

5. S est solution de l'équation différentielle $y' = -y$ sur $]0;\tau(r)[$ donc on sait qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in]0;\tau(r)[$, $S(t) = \alpha\mathrm{e}^{-t}$.
   L'énoncé suppose que S est continue sur $[0;+\infty[$ donc en particulier en 0. On doit donc avoir $\lim\limits_{t \to 0} S(t) = S(0) = 1 - r$ ce qui impose que $\alpha = 1 - r$.
   Ainsi, $\forall t \in]0;\tau(r)[$, $S(t) = (1 - r)\mathrm{e}^{-t}$.

S doit aussi être continue en $\tau(r)$, donc

$$S(\tau(r)) = \lim_{t\to\tau(r)^-} S(t) = \lim_{t\to\tau(r)^-} (1-r)\mathrm{e}^{-t} = (1-r)e^{-\tau(r)}.$$

S est solution de l'équation différentielle $y' = 2y$ sur $]\tau(r);+\infty[$ donc on sait qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in]\tau(r);+\infty[$, $S(t) = \beta\mathrm{e}^{2t}$.

En utilisant de nouveau la continuité en $\tau(r)$ (à droite cette fois) on a :

$$\lim_{t\to\tau(r)^+} S(t) = S(\tau(r)) \Leftrightarrow \beta\mathrm{e}^{2\tau(r)} = (1-r)e^{-\tau(r)} \Leftrightarrow \beta = (1-r)\mathrm{e}^{-3\tau(r)}.$$

En résumé, $S(t) = \begin{cases} (1-r)\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \in [0;\tau(r)] \\ (1-r)\mathrm{e}^{-3\tau(r)}\mathrm{e}^{2t} & \text{si } t \in]\tau(r);+\infty[\end{cases}$.

6. Par simple multiplication on a :

$$\frac{R(0)}{R(0)+S(0)} = \frac{R(T)}{R(T)+S(T)} \Leftrightarrow \frac{R(T)+S(T)}{R(0)+S(0)} = \frac{R(T)}{R(0)}.$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}\frac{R(0)}{R(0)+S(0)} = \frac{R(T)}{R(T)+S(T)} &\Leftrightarrow R(0)(R(T)+S(T)) = R(T)(R(0)+S(0)) \\ &\Leftrightarrow R(0)R(T)+R(0)S(T) = R(T)R(0)+R(T)S(0) \\ &\Leftrightarrow R(0)S(T) = R(T)S(0) \Leftrightarrow \frac{S(T)}{S(0)} = \frac{R(T)}{R(0)}.\end{aligned}$$

On a donc bien montré les égalités demandées.

7. *L'énoncé peut paraître un peu étrange car avec les hypothèses (H) et le fait que l'on connait une expression explicite de R on peut tout de suite trouver la valeur de T. Mais cela est demandé plus tard alors nous allons suivre l'énoncé.*

Supposons que $0 < T \leqslant \tau(r)$. Alors, comme S est strictement décroissante sur $[0;\tau(r)]$, on a $\dfrac{S(T)}{S(0)} \leqslant 1$.

Mais la fonction R est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc $\dfrac{R(T)}{R(0)} > 1$.

Comme $\dfrac{R(T)}{R(0)} = \dfrac{S(T)}{S(0)}$, on a ici une absurdité.

En conclusion, $T > \tau(r)$.

8. D'après les formules explicites et les hypothèses (H) trouvées on a :

$$\begin{aligned}\frac{R(T)}{R(0)} &= \mathrm{e}^{T} \\ \frac{S(T)}{S(0)} &= \mathrm{e}^{2T-3\tau(r)} \\ \frac{R(T)+S(T)}{R(0)+S(0)} &= \frac{10}{r+1-r} = 10\end{aligned}$$

9. D'après les question précédentes on a donc $\mathrm{e}^{T} = 10$, ce qui nous donne $T = \ln(10)$.

Et on a aussi $\mathrm{e}^{2T-3\tau(r)} = 10$ donc $\tau(r) = \dfrac{1}{3}\ln(10)$.

Pour finir, d'après la question 3. :

$$\frac{1}{3}\ln(10) = \ln\left[1 + \frac{1+\ln(2)}{r}\right] \Leftrightarrow r = \frac{1+\ln(2)}{10^{1/3}-1}.$$

10. Avec les valeurs de la question précédente :

$$R(T)+S(T) = r\mathrm{e}^{\ln(10)} + (1-r)\mathrm{e}^{-\ln(10)}\mathrm{e}^{2\ln(10)} = 10r + 10(1-r) = 10$$
$$\frac{R(0)}{R(0)+S(0)} = \frac{r}{r+(1-r)} = r$$
$$\frac{R(T)}{R(T)+S(T)} = \frac{r\mathrm{e}^{\ln(10)}}{10} = r.$$

Les hypothèses (H) sont bien satisfaites.

Exercice 2

Partie 1 :

1. Pour $i \geqslant 2$, F_i représente en fait l'indice le plus petit possible pour lequel la variable aléatoire X_k prend une valeur qui n'a pas encore été obtenue.
   On a donc $F_1 = 1$, $F_2 = 3$ (car X_2 prend une valeur déjà prise, puis X_3 prend une nouvelle valeur), et $F_3 = 5$ (car X_4 prend une valeur déjà rencontrée et X_5 prend une nouvelle valeur).
   De plus $X_{F_1} = X_1 = 3$, $X_{F_2} = X_3 = 2$ et $X_{F_3} = X_5 = 1$.
2. Soit $i \in [\![1; N-1]\!]$. On doit ici montrer que $F_i < F_{i+1}$.

   Par définition de F_i, on a : $\forall k < F_i$, $X_k \in \bigcup_{j=1}^{i-1}\{X_{F_j}\}$.

   Or $\bigcup_{j=1}^{i-1}\{X_{F_j}\} \subset \bigcup_{j=1}^{i}\{X_{F_j}\}$, donc $\forall k < F_i$, $\quad X_k \in \bigcup_{j=1}^{i}\{X_{F_j}\}$.

   De plus, $X_{F_i} \in \bigcup_{j=1}^{i}\{X_{F_j}\}$.

   Donc : $\quad \forall k \leqslant F_i$, $X_k \in \bigcup_{j=1}^{i}\{X_{F_j}\}$.

   Cela signifie que $F_{i+1} = \min\left\{k \geqslant 1, X_k \notin \bigcup_{j=1}^{i}\{X_{F_j}\}\right\} > F_i$.

   La famille $(F_i)_{i=1,\ldots,N}$ est bien strictement croissante.

   Par définition des F_i, les valeurs des X_{F_i} sont toutes différentes donc $\bigcup_{i=1}^{k}\{X_{F_i}\}$ est une union disjointe et donc $\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{k}\{X_{F_i}\}\right) = k$.

   Il est aussi possible de démontrer cette égalité par récurrence sur k.
3. Loi de Z_j : *La formulation de l'énoncé est un peu bancale sur cette question car le fait de partir de « soit $j \geqslant F_{i-1}+1$ » sous-entend que la valeur de F_{i-1} est fixée, or F_{i-1} est une variable aléatoire. Pour être rigoureux il faudrait parler de la loi conditionnelle de Z_j sachant $[F_{i-1} = k]$. Je vais me permettre d'utiliser l'ambiguïté de l'énoncé à mon avantage pour éviter des notations trop lourdes et des calculs inutilement longs.*
   On a $Z_j(\Omega) = \{0, 1\}$ et

   $$P(Z_j = 0) = P(X_j \in \{X_1, \ldots, X_{F_{i-1}}\}) = \frac{\mathrm{card}(\{X_1, \ldots, X_{F_{i-1}}\})}{N},$$

   car X_j suit une loi uniforme.

   Or, par définition des F_k, $\{X_1, \ldots, X_{F_{i-1}}\} = \bigcup_{k=1}^{i-1}\{X_{F_k}\} = i-1$, d'après la question précédente.

   Donc $P(Z_j = 0) = \dfrac{i-1}{N}$ et, par conséquent, $P(Z_j = 1) = \dfrac{N-i+1}{N}$.

Z_j suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{N-i+1}{N}$.

Indépendance : comme les variables Z_j et $Z_{j'}$ ne prennent que 2 valeurs il suffit de montrer que les événements $[Z_j=0]$ et $[Z_{j'}=0]$ sont indépendants. *(D'après le cours, si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants, $\overline{A}$ et B aussi, et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ aussi.)*

On pose $E_i=\{X_1,\dots,X_{F_{i-1}}\}$. On a :

$$P([Z_j=0]\cap[Z_{j'}=0])=P([X_j\in E_i]\cap[X_{j'}\in E_i])=P(X_j\in E_i)\times P(X_{j'}\in E_i),$$

car X_j et $X_{j'}$ sont indépendantes.

Ainsi, $P([Z_j=0]\cap[Z_{j'}=0])=P(Z_j=0)\times P(Z_{j'}=0)$, et donc, d'après la remarques faite au début du raisonnement, Z_j et $Z_{j'}$ sont indépendantes.

4. Loi de F_i-F_{i-1} :
Cette variable aléatoire correspond au temps d'attente pour voir apparaitre un numéro différent des valeurs de X_{F_1}, X_{F_2}, $\dots$, $X_{F_{i-1}}$ au cours d'une succession illimitée d'expériences identiques et indépendantes. La probabilité de succès est ici de $1-\dfrac{i-1}{N}$.
Ainsi, F_i-F_{i-1} suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{N-i+1}{N}$.
On a donc $E(F_i-F_{i-1})=\dfrac{N}{N-i+1}$ et $V(F_i-F_{i-1})=\dfrac{N(i-1)}{(N-i+1)^2}$.
Indépendance : pour « alléger » les calculs nous allons raisonner avec F_2-F_1 et F_3-F_2 mais on remarquera que le raisonnement pourra être adapté dans le cas général.
Soient k et j deux entiers naturels non nuls :

$$\begin{aligned}
P([F_2-F_1=k]\cap[F_3-F_2=j]) &= P\Big(\bigcup_{(a,b)\in[\![1;N]\!],a\neq b}[X_1=a]\cap\ldots\cap[X_k=a]\cap[X_{k+1}=b]\\
&\qquad\cap[X_{k+2}\in\{a,b\}]\cap\ldots\cap[X_{k+j}\in\{a,b\}]\cap[X_{k+j+1}\notin\{a,b\}]\Big)\\
&=\sum_{(a,b)\in[\![1;N]\!],a\neq b}P(X_1=a)\times\ldots\times P(X_k=a)\times P(X_{k+1}=b)\\
&\qquad\times P(X_{k+2}\in\{a,b\})\times\ldots\times P(X_{k+j}\in\{a,b\})\times P(X_{k+j+1}\notin\{a,b\})\\
&\qquad\text{union d'evt incompatibles et intersection d'evt indépendants}\\
&=\sum_{(a,b)\in[\![1;N]\!],a\neq b}\left(\frac{1}{N}\right)^k\times\frac{1}{N}\times\left(\frac{2}{N}\right)^{j-1}\times\frac{N-2}{N}\\
&=N(N-1)\left(\frac{1}{N}\right)^k\times\frac{1}{N}\times\left(\frac{2}{N}\right)^{j-1}\times\frac{N-2}{N}\\
&=\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\times\frac{N-1}{N}\times\left(\frac{2}{N}\right)^{j-1}\times\frac{N-2}{N}\\
&=P(F_2-F_1=k)\times P(F_3-F_2=j).
\end{aligned}$$

Les variables sont bien indépendantes.

5. Encadrement : La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc, pour tout $t\in[i;i+1]$, $\dfrac{1}{t}\leqslant\dfrac{1}{i}$. Par croissance de l'intégrale, on a donc $\displaystyle\int_i^{i+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_i^{i+1}\frac{1}{i}\,\mathrm{d}t$. Or $\displaystyle\int_i^{i+1}\frac{1}{i}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{i}$ donc on a bien $\displaystyle\int_i^{i+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{i}$.
C'est exactement le même raisonnement pour l'autre inégalité en partant de $\dfrac{1}{i}\leqslant\dfrac{1}{t}$ pour $t\in[i-1;i]$ et en intégrant sur $[i-1;i]$.
Majoration :
Commençons par sommer l'encadrement précédent pour i allant de 2 à N (attention à l'intégrale de droite pour $i=1$!). On obtient :

$$\ln(N+1)-\ln(2)\leqslant\sum_{i=2}^{N}\frac{1}{i}\leqslant\ln(N).$$

En ajoutant 1 et soustrayant $\ln(N)$, on a alors :

$$\ln(N+1) - \ln(2) + 1 - \ln(N) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} - \ln(N) \leqslant 1.$$

On peut alors remarquer que $\ln(N+1) - \ln(2) + 1 - \ln(N) \geqslant 0$ car $\ln(N+1) \geqslant \ln(N)$ et $1 \geqslant \ln(2)$. On obtient donc $\left|\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} - \ln(N)\right| \leqslant 1$.

6. L'astuce de cette question consiste à remarquer que

$$F_N = F_1 + \sum_{i=2}^{N}(F_i - F_{i-1}) = 1 + \sum_{i=2}^{N}(F_i - F_{i-1}).$$

Par linéarité de l'espérance,

$$E(F_N) = 1 + \sum_{i=2}^{N} E(F_i - F_{i-1}) = 1 + \sum_{i=2}^{N} \frac{N}{N-i+1} = 1 + N\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j} = N\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Grâce aux propriétés de la variance, $V(F_N) = V\left(\sum_{i=2}^{N}(F_i - F_{i-1})\right)$ et comme les $F_i - F_{i-1}$ sont indépendantes :

$$V(F_N) = \sum_{i=2}^{N} V(F_i - F_{i-1}) = \sum_{i=2}^{N} \frac{N(i-1)}{(N-i+1)^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{N(i-1)}{(N-i+1)^2} = N\sum_{j=1}^{N} \frac{N-j}{j^2} = N^2\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^2} - N\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j}.$$

7. *L'idée va être d'appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à* $\frac{F_N}{N}$ *et de manipuler un peu l'événement* $\left[\left|\frac{F_N}{N} - E\left(\frac{F_N}{N}\right)\right| > \dots\right]$.

On sait que :

$$\left|\frac{F_N}{N} - \ln(N)\right| \leqslant \left|\frac{F_N}{N} - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}\right| + \left|\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} - \ln(N)\right| \leqslant \left|\frac{F_N}{N} - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}\right| + 1.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $\left[\left|\frac{F_N}{N} - \ln(N)\right| > \varepsilon\ln(N)\right] \subset \left[\left|\frac{F_N}{N} - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}\right| > \varepsilon\ln(N) - 1\right]$.

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la VAR $\frac{F_N}{N}$ qui admet bien une espérance et une variance, on sait que :

$$P\left(\left|\frac{F_N}{N} - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}\right| > \varepsilon\ln(N) - 1\right) \leqslant \frac{V(F_N/N)}{(\varepsilon\ln(N) - 1)^2}.$$

On a donc $P\left(\left|\frac{F_N}{N} - \ln(N)\right| > \varepsilon\ln(N)\right) \leqslant \frac{V(F_N/N)}{(\varepsilon\ln(N) - 1)^2}$.

D'après les propriétés de la variance, $V\left(\frac{F_N}{N}\right) = \frac{1}{N^2}V(F_N) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^2} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \leqslant \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^2}$.

On a donc montré que : $P\left(\left|\frac{F_N}{N\ln(N)} - 1\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\ln(N)^2} \times \frac{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^2}}{\left(\varepsilon - \frac{1}{\ln(N)}\right)^2}$.

Comme la série $\sum \frac{1}{j^2}$ est convergente et que $\lim_{N\to+\infty} \left(\varepsilon - \frac{1}{\ln(N)}\right)^2 = \varepsilon^2$, on peut dire que $\dfrac{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^2}}{\left(\varepsilon - \frac{1}{\ln(N)}\right)^2}$ a une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$ et donc est majoré par une constante $C' > 0$ indépendante de N.

Pour conclure, il existe bien $C' > 0$ tel que : $P\left(\left|\frac{F_N}{N\ln(N)} - 1\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{C'}{\ln(N)^2}$.

Partie 2 :

1. On a :

$$\begin{aligned}
P(E_{k,i_1} \cap \ldots \cap E_{k,i_\ell}) &= P([X_1 \notin \{i_1, \ldots, i_\ell\}] \cap \ldots \cap [X_k \notin \{i_1, \ldots, i_\ell\}]) \\
&= P(X_1 \notin \{i_1, \ldots, i_\ell\}) \times \ldots \times P(X_k \notin \{i_1, \ldots, i_\ell\}) \\
&\text{VAR indépendantes} \\
&= \left(1 - \frac{\ell}{N}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{\ell}{N}\right) = \left(1 - \frac{\ell}{N}\right)^k.
\end{aligned}$$

2. F_N désigne l'indice de la VAR X_i pour laquelle, pour la première fois, on a dans l'ensemble $\{X_1, \ldots, X_i\}$ tous les entiers de $[\![1; N]\!]$ qui sont représentés.

   Donc dire que $F_N > k$ revient à dire que dans l'ensemble $\{X_1, \ldots, X_k\}$ il y a encore un numéro qui n'a pas été obtenu. Ainsi, au moins l'un des événements $E_{k,j}$, $j \in [\![1; N]\!]$ est réalisé.

   On peut donc écrire : $[F_N > k] = \bigcup_{i=1}^{N} E_{k,i}$.

   D'après la formule du crible, on a donc :

$$\begin{aligned}
P(F_N > k) &= \sum_{\ell=1}^{N} \left((-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\ell \leqslant N} P\left(E_{k,i_1} \cap \ldots \cap E_{k,i_\ell}\right) \right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} \left((-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\ell \leqslant N} \left(1 - \frac{\ell}{N}\right)^k \right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} \left((-1)^{\ell+1} \left(1 - \frac{\ell}{N}\right)^k \underbrace{\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\ell \leqslant N} 1}_{\binom{N}{\ell}} \right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} (-1)^{\ell+1} \binom{N}{\ell} \left(1 - \frac{\ell}{N}\right)^k
\end{aligned}$$

3. Notons $f : x \mapsto 1 - x - \mathrm{e}^{-x}$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -1 + \mathrm{e}^{-x}.$$

   La fonction f est donc croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$. Comme elle est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc un maximum en $x = 0$ qui vaut $f(0) = 0$.

   On a donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - x - \mathrm{e}^{-x} \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

4. <u>Première inégalité :</u>

   D'après la question précédente : $\left(1 - \frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)} \leqslant \left(\mathrm{e}^{-\ell/N}\right)^{k_N(t)} = \mathrm{e}^{-k_N(t)\frac{\ell}{N}}$.

   De plus $\binom{N}{\ell} = \frac{N!}{\ell!(N-\ell)!} = \frac{1}{\ell!} N(N-1)\ldots(N-\ell+1) \leqslant \frac{N^\ell}{\ell!}$.

Donc, par produit d'inégalités de termes positifs, $\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)} \leqslant \frac{N^\ell}{\ell!}\times \mathrm{e}^{-k_N(t)\frac{\ell}{N}} = \frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{\ell\ln(N)-k_N(t)\frac{\ell}{N}}$.

Deuxième inégalité :

Par définition de $k_n(t)$, on a $k_N(t) \geqslant N\ln(N)+tN$. Donc $\ln(N)-\frac{k_N(t)}{N}\leqslant -t$.

La fonction exponentielle étant croissante, on en déduit que $\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)} \leqslant \frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{-\ell t}$.

5. Première inégalité :

Pour tout $N\geqslant \ell+1$, en remarquant que pour $i\in [\![N-\ell+1;N]\!]$, $\ln(i)\geqslant \ln(N-\ell+1)$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\ell\ln(N)-\sum_{i=N-\ell+1}^{N}\ln(i)\right| &\leqslant |\ell(\ln(N)-\ln(N-\ell+1))|\\ &\leqslant \ell\ln\left(1+\frac{\ell-1}{N-\ell+1}\right)\\ &\leqslant \frac{\ell(\ell-1)}{N-\ell+1}\quad \text{car } \forall x>0,\ \ln(1+x)\leqslant x\\ &\leqslant \frac{1}{N}\times\frac{N\ell(\ell-1)}{N-\ell+1}.\end{aligned}$$

Or, la fonction $x\mapsto \frac{x\ell(\ell-1)}{x-\ell+1}$ est décroissante sur $[\ell+1;+\infty[$ donc elle est majorée par sa valeur en $\ell+1$.

On a donc $\left|\ell\ln(N)-\sum_{i=N-\ell+1}^{N}\ln(i)\right|\leqslant \frac{1}{N}\times\frac{\ell(\ell^2-1)}{2}$.

Deuxième inégalité :

Par définition de $k_N(t)$, on a $N\ln(N)+tN\leqslant k_N(t)\leqslant N\ln(N)+tN+1$.

En multipliant par $\ln\left(1-\frac{\ell}{N}\right)<0$, on obtient :

$$(N\ln(N)+tN+1)\ln\left(1-\frac{\ell}{N}\right)\leqslant k_N(t)\ln\left(1-\frac{\ell}{N}\right)\leqslant (N\ln(N)+tN)\ln\left(1-\frac{\ell}{N}\right).$$

Pour plus de lisibilité, nous allons nous occuper de cet encadrement en deux temps.

On a, tout d'abord :

$$\begin{aligned}\ell\ln(N)+k_N(t)\ln\left(1-\frac{\ell}{N}\right)+t\ell &\leqslant (N\ln(N)+tN)\ln\left(1-\frac{\ell}{N}\right)+\ell\ln(N)+t\ell\\ &\leqslant -\frac{\ell}{N}(N\ln(N)+tN)+\ell\ln(N)+t\ell\\ &\quad \text{car },\forall x<1,\ \ln(1-x)\leqslant -x\quad \text{question 3.}\\ \text{donc } \ell\ln(N)+k_N(t)\ln\left(1-\frac{\ell}{N}\right)+t\ell &\leqslant 0.\end{aligned}$$

D'autre part :

$$(N\ln(N)+tN+1)\ln\left(1-\frac{\ell}{N}\right)+\ell\ln(N)+t\ell\leqslant \ell\ln(N)+k_N(t)\ln\left(1-\frac{\ell}{N}\right)+t\ell.$$

On pose $A_N=(N\ln(N)+tN+1)\ln\left(1-\frac{\ell}{N}\right)+\ell\ln(N)+t\ell$.

Pour montrer que $|A_N|\leqslant \frac{C_1\ln(N)}{N}$, nous allons montrer que $\frac{N}{\ln(N)}A_N$ est bornée.

On utilise pour cela un développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1-u)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
A_N &= (N\ln(N)+tN+1)\left(-\frac{\ell}{N}-\frac{\ell^2}{2N^2}+\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)+\ell\ln(N)+t\ell\\
&= \ell\ln(N)+t\ell-\ell\ln(N)-\frac{\ell^2\ln(N)}{2N}+o\left(\frac{\ln(N)}{N}\right)\\
&\quad -t\ell-\underbrace{\frac{t\ell^2}{2N}}_{o(\ln(N)/N)}+\underbrace{o\left(\frac{1}{N}\right)}_{o(\ln(N)/N)}-\underbrace{\frac{\ell}{N}}_{o(\ln(N)/N)}-\underbrace{\frac{\ell^2}{2N^2}}_{o(\ln(N)/N)}+\underbrace{o\left(\frac{1}{N^2}\right)}_{o(\ln(N)/N)}\\
&= -\frac{\ell^2\ln(N)}{2N}+o\left(\frac{\ln(N)}{N}\right)\\
&= \frac{\ln(N)}{N}\left(-\frac{\ell^2}{2}+o(1)\right).
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(-\frac{\ell^2}{2}+o(1)\right)=-\frac{\ell^2}{2}$, cela signifie que cette suite est bornée.

Il existe donc $C_1>0$ telle que $\left|-\frac{\ell^2}{2}+o(1)\right|\leqslant C_1$ et on a donc

$$\left|\ell\ln(N)+k_N(t)\ln\left(1-\frac{\ell}{N}\right)+t\ell\right|\leqslant|A_N|\leqslant\frac{C_1\ln(N)}{N}.$$

En notant $C=\max\left(\frac{\ell(\ell^2-1)}{2},C_1\right)$, on obtient bien les deux inégalités demandées.

<u>Déduction :</u>

On a vu que $\binom{N}{\ell}=\frac{1}{\ell!}N(N-1)\dots(N-\ell+1)$, donc $\binom{N}{\ell}\underset{N\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\ell!}N^\ell$.

On en déduit que $\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)}\underset{N\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\ell!}\exp\left(\ell\ln(N)+k_N(t)\ln\left(1-\frac{\ell}{N}\right)\right)$.

Or, d'après la deuxième inégalité, $\lim\limits_{N\to+\infty}\ell\ln(N)+k_N(t)\ln\left(1-\frac{\ell}{N}\right)=-t\ell$.

Donc, par composition de limites, $\lim\limits_{N\to+\infty}\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)}=\frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{-t\ell}$.

Je n'ai pas utilisé la première inégalité de cette question car j'ai écrit que $N(N-1)\dots(N-\ell+1)\sim N^\ell$. Si on ne passe pas par cet équivalent, on peut montrer que $\ln\left(N(N-1)\dots(N-\ell+1)\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)}\right)$ *tend vers $-t\ell$ en utilisant les deux inégalités.*

6. On a $\left|(-1)^{\ell-1}\frac{\mathrm{e}^{-t\ell}}{\ell!}\right|=\frac{(\mathrm{e}^{-t})^\ell}{\ell!}$. Or, pour tout réel x, la série $\sum\frac{x^\ell}{\ell!}$ est convergente (série de référence).

   Donc la série $\sum\limits_{\ell\geqslant1}(-1)^{\ell-1}\frac{\mathrm{e}^{-t\ell}}{\ell!}$ est absolument convergente.

   De plus :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty}(-1)^{\ell-1}\frac{\mathrm{e}^{-t\ell}}{\ell!}=-\sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{e}^{-t})^\ell}{\ell!}=-\left(\exp(-\mathrm{e}^{-t})-1\right)=1-\exp(-\mathrm{e}^{-t}).$$

7. <u>Première inégalité :</u>

   On peut tout d'abord remarquer que, d'après l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue et d'après la question 4. de cette partie, pour tout N et N_0 tels que $N\geqslant N_0$,

$$\left|\sum_{\ell=N_0}^{N}(-1)^{\ell+1}\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)}\right|\leqslant\sum_{\ell=N_0}^{N}\frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{-\ell t}.$$

Or la série $\sum \frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{-\ell t}$ est convergente et à termes positifs donc $\sum_{\ell=N_0}^{N} \frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{-\ell t} \leqslant \sum_{\ell=N_0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{-\ell t}$.

Ainsi $\left|\sum_{\ell=N_0}^{N} (-1)^{\ell+1}\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)}\right| \leqslant \sum_{\ell=N_0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{-\ell t}$.

D'après l'inégalité triangulaire pur la valeur absolue, $\left|\sum_{\ell=N_0}^{+\infty} (-1)^{\ell+1}\frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{-\ell t}\right| \leqslant \sum_{\ell=N_0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{-\ell t}$.

Donc, pour tout N et N_0 tels que $N \geqslant N_0$:

$$\left|\sum_{\ell=N_0}^{N} (-1)^{\ell+1}\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)}\right| + \left|\sum_{\ell=N_0}^{+\infty} (-1)^{\ell+1}\frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{-\ell t}\right| \leqslant 2\sum_{\ell=N_0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{-\ell t}.$$

Or $\lim_{N_0\to+\infty} \sum_{\ell=N_0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{-\ell t} = 0$ (car la série $\sum \frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{-\ell t}$ est convergente), donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{\ell=N_0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{-\ell t} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc bien trouvé, pour $\varepsilon > 0$ donné, un N_0 tel que $\forall N \geqslant N_0$,

$$\left|\sum_{\ell=N_0}^{N} (-1)^{\ell+1}\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)}\right| + \left|\sum_{\ell=N_0}^{+\infty} (-1)^{\ell+1}\frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{-\ell t}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Deuxième inégalité :
Soit $\varepsilon > 0$ et N_0 construit à la question précédente.
Pour tout $N \geqslant N_0$ on a :

$$\begin{aligned}
\left|P(F_N > k_N(t)) - \sum_{\ell=1}^{+\infty}(-1)^{\ell-1}\frac{\mathrm{e}^{-t\ell}}{\ell!}\right| &= \left|\sum_{\ell=1}^{N}(-1)^{\ell+1}\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)} - \sum_{\ell=1}^{+\infty}(-1)^{\ell-1}\frac{\mathrm{e}^{-t\ell}}{\ell!}\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{\ell=1}^{N_0-1}(-1)^{\ell+1}\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)} - \sum_{\ell=1}^{N_0-1}(-1)^{\ell-1}\frac{\mathrm{e}^{-t\ell}}{\ell!}\right| \\
&\quad + \left|\sum_{\ell=N_0}^{N}(-1)^{\ell+1}\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)}\right| + \left|\sum_{\ell=N_0}^{+\infty}(-1)^{\ell+1}\frac{1}{\ell!}\mathrm{e}^{-\ell t}\right| \\
&\leqslant \sum_{\ell=1}^{N_0-1}\left|\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)} - \frac{\mathrm{e}^{-t\ell}}{\ell!}\right| + \varepsilon
\end{aligned}$$

Pour chaque ℓ fixé entre 1 et N_0-1, on a $\lim_{N\to+\infty}\left|\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)} - \frac{\mathrm{e}^{-t\ell}}{\ell!}\right| = 0$, donc il existe à chaque fois un entier $\tilde{N}_\ell$, tel que

$$\forall N \geqslant \tilde{N}_\ell, \qquad \left|\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)} - \frac{\mathrm{e}^{-t\ell}}{\ell!}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{N_0-1}.$$

Notons alors $N_1 = \max\left(N_0, \tilde{N}_1, \ldots, \tilde{N}_{N_0-1}\right)$.
On a, pour tout $N \geqslant N_1$:

$$\left|P(F_N > k_N(t)) - \sum_{\ell=1}^{+\infty}(-1)^{\ell-1}\frac{\mathrm{e}^{-t\ell}}{\ell!}\right| \leqslant \sum_{\ell=1}^{N_0-1}\frac{\varepsilon}{N_0-1} + \varepsilon = 2\varepsilon.$$