

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 13

EXERCICE 1 : SUJET ORAL AGRO-VÉTO

1. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme de fonctions usuelles continues et dérivables.

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x^2(x+1)}.$$

Donc $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

D'après le théorème de bijection monotone f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur

$$f(]0; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 0} f(x)[.$$

Comme $f(x) = \frac{x \ln(x) + 1}{x} - \ln(x+1)$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

Comme $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x}$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Donc $f(]0; +\infty[) =]0; +\infty[$.

Comme $1 \in]0; +\infty[$, il admet un unique antécédent par f que l'on note α .

2. $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 - 2\ln(2) \approx 1,61$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \ln(3) \approx 0,9$.

On a donc $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(\alpha) \leq f\left(\frac{1}{3}\right)$ et donc $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ car f^{-1} est décroissante.

3. Attention : l'algorithme de dichotomie permet de trouver la solution de $g(x) = 0$. Dans l'algorithme il faut donc penser à remplacer g par $f - 1$.

```
import math as m
def dico(n):
    u=1/3
    v=1/2
    while v-u>10**(-n):
        w=(u+v)/2
        if (m.log(u/(u+1))+1/u-1)*(m.log(w/(w+1))+1/w-1)<=0:
            v=w
        else:
            u=w
    return u
```

Pour $n = 2$: $\alpha \approx 0,46$.

4. Φ est évidemment définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives.

Φ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ car la fonction nulle est continue sur $] -\infty; \alpha[$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2(1+x)}$ est continue sur $] \alpha; +\infty[$ (qui ne contient pas 0 et -1).

De plus, sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) dt = \int_{\alpha}^{+\infty} \Phi(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-f(t)]_{\alpha}^A = 0 + f(\alpha) = 1.$$

Donc Φ est bien une densité de probabilité.

5. Pour $t > \alpha$, $|t\Phi(t)| = \frac{1}{t(1+t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$.

$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente donc par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, $\int_{\alpha}^{+\infty} t\Phi(t) dt$ est absolument convergente.

$\int_{-\infty}^{\alpha} t\Phi(t) dt$ est évidemment absolument convergente.

6. Pour tout $t > \alpha$, $t\Phi(t) - \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t(1+t)} - \frac{1}{t^2} = \frac{-1}{t^2(1+t^2)} = f'(t)$.

7. Méthode 1 :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\alpha}^{+\infty} t\Phi(t) \, dt = \int_{\alpha}^{+\infty} f'(t) + \frac{1}{t^2} \, dt && \text{question précédente} \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[f(t) - \frac{1}{t} \right]_{\alpha}^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} f(A) - \frac{1}{A} - f(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \\ &= -f(\alpha) + \frac{1}{\alpha} = -1 + \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\alpha}^{+\infty} t\Phi(t) \, dt = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)} \, dt = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \, dt \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\ln(t) - \ln(t+1)]_{\alpha}^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln(A) - \ln(A+1) - \ln(\alpha) + \ln(\alpha+1) \\ &= -\ln(\alpha) + \ln(\alpha+1) = \frac{1}{\alpha} - f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - 1. \end{aligned}$$

Encadrement :

$$2 \leq \frac{1}{\alpha} \leq 3 \text{ donc } 1 \leq E(X) \leq 2.$$

EXERCICE 2 : FACULTATIF : TYPE ENS

Première partie

1. Soit $c > 0$. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(cx)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(c)}{\ln(x)} + 1 = 1.$$

Donc $\ln$ est bien à variation lente.

2. Sous cette hypothèse, par composition de limites on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(cx) = \ell$ (car $c > 0$ donc $cx \rightarrow +\infty$).

Donc, par quotient de limite (dénominateur non nul), $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$.

f est à variation lente.

3. Prenons par exemple la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. On a alors, pour tout $c > 0$ et $x > 0$,

$$\frac{f(cx)}{f(x)} = \frac{1}{c},$$

qui ne tend pas vers 1 si $c \neq 1$.

Donc une fonction qui tend vers 0 en $+\infty$ n'est pas toujours à variation lente.

Deuxième partie

4. h étant continue sur $[2; +\infty[$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \mapsto \int_2^x \frac{h(u)}{u} \, du$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2; +\infty[$.

Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2; +\infty[$, et pour tout $x \geq 2$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a \times \frac{h(x)}{x} \exp \left(\int_2^x \frac{h(u)}{u} \, du \right) \\
\Leftrightarrow f'(x) &= \frac{h(x)}{x} \times f(x) \\
\Leftrightarrow h(x) &= \frac{x f'(x)}{f(x)}.
\end{aligned}$$

5. a) On choisit de prendre $f(x) = \ln(x)$ et $h(x) = \frac{1}{\ln(x)}$. On a alors, pour tout $x \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\exp \left(\int_2^x \frac{h(u)}{u} \, du \right) &= \exp \left(\int_2^x \frac{1}{u \ln(u)} \, du \right) \\
&= \exp (\ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2))) \\
&= \frac{\ln(x)}{\ln(2)}.
\end{aligned}$$

On a donc $\ln(x) = \ln(2) \exp \left(\int_2^x \frac{h(u)}{u} \, du \right)$ avec $h : x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$, qui est bien continue sur $[2; +\infty[$ et qui tend vers 0 en $+\infty$.

- b) Pour $0 < x < 2$, $\int_2^x \frac{h(u)}{u} \, du = \ln(|\ln(x)|) - \ln(\ln(2))$.

$$\text{Donc } \exp \left(\int_2^x \frac{h(u)}{u} \, du \right) = \frac{|\ln(x)|}{\ln(2)}.$$

On voit alors que pour $1 \leq x < 2$, l'égalité précédente est encore vérifiée mais pas pour $x < 1$.

6. a) On sait que h tend vers 0 en $+\infty$ donc, par définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall u \geq M, \quad |h(u)| \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $x \geq M$

$$\begin{aligned}
\left| \int_M^x \frac{h(u)}{u} \, du \right| &\leq \int_M^x \left| \frac{h(u)}{u} \right| \, du && \text{inégalité triangulaire} \\
&\leq \int_M^x \frac{\varepsilon}{u} \, du && \text{croissance de l'intégrale} \\
&\leq \varepsilon (\ln(x) - \ln(M)).
\end{aligned}$$

On a donc, pour $x \geq M$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a \exp \left(\int_2^x \frac{h(u)}{u} \, du \right) \\
&= a \exp \left(\int_2^M \frac{h(u)}{u} \, du + \int_M^x \frac{h(u)}{u} \, du \right) \\
&= a \exp \left(\int_2^M \frac{h(u)}{u} \, du \right) \times \exp \left(\int_M^x \frac{h(u)}{u} \, du \right) \\
&\leq a \exp \left(\int_2^M \frac{h(u)}{u} \, du \right) \times \exp (\varepsilon (\ln(x) - \ln(M))) \\
&\leq a \exp \left(\int_2^M \frac{h(u)}{u} \, du \right) \times \frac{x^\varepsilon}{M^\varepsilon}.
\end{aligned}$$

On a donc bien $f(x) \leq C x^\varepsilon$ avec $C = \frac{a}{M^\varepsilon} \exp \left(\int_2^M \frac{h(u)}{u} \, du \right)$.

b) Pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $M' > 0$ tel que

$$\forall u \geq M', \quad |h(u)| \leq \varepsilon'.$$

Si $c > 1$: On a alors, pour $x \geq M'$,

$$\left| \int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} du \right| \leq \int_x^{cx} \frac{\varepsilon'}{u} du = \varepsilon' \ln(c).$$

En appliquant cela à $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\ln(c)}$, on a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad x \geq A \Rightarrow \left| \int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} du \right| \leq \varepsilon.$$

C'est exactement la définition de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} du = 0$.

Si $c < 1$:

On a $\int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} du = - \int_{cx}^x \frac{h(u)}{u} du = - \int_y^{y/c} \frac{h(u)}{u} du$, avec $y = cx$. On peut alors appliquer le cas précédent car $\frac{1}{c} > 1$, et on a toujours $y \rightarrow +\infty$.

Si $c = 1$: On a $\int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} du = 0$ donc le résultat est évident.

c) Soit $x > 0$ et $c > 0$. On a alors

$$\frac{f(cx)}{f(x)} = \exp \left(\int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} du \right) \rightarrow 1,$$

d'après la question précédente.

f est bien à variation lente.

Troisième partie

7. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\bar{F}(u) = P([X > u] \cup [X = u]) = P(X > u) + P(X = u)$ car on a une union d'événements disjoints.

De plus comme la fonction de répartition de X est continue, on peut montrer, comme dans le cours, que $P(X = u) = 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq P(X = u) \leq P\left(u - \frac{1}{n} < X \leq u\right) = F_X(u) - F_X\left(u - \frac{1}{n}\right).$$

Il reste à passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ pour obtenir, grâce à la continuité de F_X en u , que $P(X = u) = 0$.

On a donc $\bar{F}(u) = P(X > u) = 1 - P(X \leq u) = 1 - F_X(u)$.

Comme on sait que F_X est continue sur $\mathbb{R}$, on peut en déduire que $\bar{F}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

8. a) D'après la question précédente, la fonction $\bar{F}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \bar{F}(u) = 1 - 1 = 0$. On a aussi $\bar{F}(0) = P(X \geq 0) = 1$, car X est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Or $\frac{1}{n} \in]0; 1]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a_n \in [0; +\infty[$ tel que $\bar{F}(a_n) = \frac{1}{n}$.

b) Dans cette question, pour $x > 0$, $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Donc $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$ et ainsi, $a_n = \frac{\ln(n)}{\lambda}$.

- c) X est une VAR à valeurs positives et admet une espérance. Donc, d'après l'inégalité de Markov, pour tout $u > 0$:

$$P(X \geq u) \leq \frac{E(X)}{u}.$$

En appliquant cela pour $u = a_n$, on obtient $\bar{F}(a_n) \leq \frac{E(X)}{a_n} \Leftrightarrow E(X) \geq \frac{a_n}{n}$.

- d) Raisonnons par l'absurde. Supposons que X admet une espérance. Alors d'après la question précédente la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ est majorée, ce qui est en contradiction avec le fait que $\frac{a_n}{n} \rightarrow +\infty$.

9. g étant à variation lente, $g(cx) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$. On a

$$\begin{aligned} P(X \geq ua_n) &= \bar{F}(ua_n) = \frac{g(ua_n)}{(ua_n)^\alpha} \\ &\sim \frac{g(a_n)}{u^\alpha a_n^\alpha} && \text{car } a_n \rightarrow +\infty \\ &\sim \frac{\bar{F}(a_n)}{u^\alpha} = \frac{1}{nu^\alpha}. \end{aligned}$$

10. Soit $u > 0$. On a

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{a_n} \geq u\right) &= P(\max(X_1, \dots, X_n) \geq a_n u) \\ &= 1 - P(\max(X_1, \dots, X_n) < a_n u) \\ &= 1 - P([X_1 < a_n u] \cap \dots \cap [X_n < a_n u]) \\ &= 1 - P(X_1 < a_n u) \times \dots \times P(X_n < a_n u) && \text{VAR indépendantes} \\ &= 1 - (1 - \bar{F}(a_n u))^n \\ &= 1 - \exp(n \ln(1 - \bar{F}(a_n u))). \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $\bar{F}(a_n u) \rightarrow 0$, donc $\ln(1 - \bar{F}(a_n u)) \sim -\bar{F}(a_n u) \sim -\frac{1}{u^\alpha n}$.

On en déduit que $n \ln(1 - \bar{F}(a_n u)) \sim -\frac{1}{u^\alpha}$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 - \bar{F}(a_n u)) = -\frac{1}{u^\alpha}$.

Par composition de limites, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{a_n} \geq u\right) = 1 - e^{-1/u^\alpha}.$$