

# CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 3

1. Lorsque  $x \in \mathbb{R}^-$ , la suite  $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  n'admet pas de limite car  $((-1)^{n+1})$  n'admet pas de limite et  $\left(\frac{1}{n^x}\right)$  diverge vers  $+\infty$  ou est constante égale à 1 pour  $x = 0$ .

La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$  est donc grossièrement divergente pour  $x \in \mathbb{R}^-$ .

2. Dans cette question  $x$  est un réel strictement positif.

a) Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} u_{2(p+1)} - u_{2p} &= -\frac{1}{(2p+2)^x} + \frac{1}{(2p+1)^x} \geq 0 \Rightarrow (u_{2p})_{p \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante} \\ u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} &= \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p)^x} \leq 0 \Rightarrow (u_{2p-1})_{p \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante} \\ u_{2p} - u_{2p-1} &= -\frac{1}{(2p)^x} \rightarrow 0 \text{ lorsque } p \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Les suites  $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}^*}$  et  $(u_{2p-1})_{p \in \mathbb{N}^*}$  sont donc bien adjacentes.

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite. Notons alors  $S(x)$  la limite commune aux suites  $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}^*}$  et  $(u_{2p-1})_{p \in \mathbb{N}^*}$ .

- b) D'après la question précédente, comme les suites  $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}^*}$  et  $(u_{2p-1})_{p \in \mathbb{N}^*}$  convergent vers la même limite, on peut en déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente.

Or  $u_n$  est la somme partielle d'indice  $n$  de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ .

Par définition, cela signifie que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$  est convergente.

- c) Par propriété des suites adjacentes, on sait que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2p} \leq S(x) \leq u_{2p+1}.$$

Et comme la suite  $(u_{2p-1})_{p \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante,  $u_{2p+1} \leq u_{2p-1}$ .

On a donc bien  $u_{2p} \leq S(x) \leq u_{2p+1} \leq u_{2p-1}$ .

- d) D'après la question précédente, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  :  $0 \leq S(x) - u_{2p} \leq u_{2p+1} - u_{2p}$ .

$$\text{Or } u_{2p-1} - u_{2p} = \frac{1}{(2p+1)^x}.$$

$$\text{Donc, pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq S(x) - u_{2p} \leq \frac{1}{(2p+1)^x}.$$

$$\text{De même, pour tout } p \in \mathbb{N}^* : u_{2p} - u_{2p-1} \leq S(x) - u_{2p-1} \leq 0.$$

$$\text{Donc, pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \quad -\frac{1}{(2p)^x} \leq S(x) - u_{2p-1} \leq 0.$$

$$\text{En conclusion, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad -\frac{1}{(n+1)^x} \leq S(x) - u_n \leq \frac{1}{(n+1)^x}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$|S(x) - u_n| \leq \frac{1}{(n+1)^x}.$$

- e) `def valeur_approchee(x,eps):`

'''étant donné x et eps réel >0, renvoie une valeur approchée de S(x) à eps près'''

`u=1`

`n=1`

`while 1/(n+1)**x > eps:`

`n+=1`

`u+=(-1)**(n+1)/n**x`

`return u`

3. Soient  $x \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} &= \sum_{i=1}^p \frac{(-1)^{2i+1}}{(2i)^x} + \sum_{i=1}^p \frac{(-1)^{2i-1+1}}{(2i-1)^x} \\
&= \sum_{i=1}^p \frac{-1}{2^x i^x} + \sum_{i=1}^p \frac{1}{(2i-1)^x} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{(2i-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^p \frac{1}{i^x}
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} &= \sum_{i=1}^p \frac{1}{(2i-1)^x} + \sum_{i=1}^p \frac{1}{(2i)^x} \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^p \frac{1}{(2i-1)^x} &= \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \sum_{i=1}^p \frac{1}{(2i)^x} \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^p \frac{1}{(2i-1)^x} &= \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^p \frac{1}{i^x}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} &= \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^p \frac{1}{i^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^p \frac{1}{i^x} \\
&= \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - 2 \times \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^p \frac{1}{i^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}
\end{aligned}$$

4. a) D'après la question précédente, utilisée avec  $x = 1$  :  $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ .

On effectue alors le changement d'indice  $i = k - n$  :

$$v_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}}.$$

b) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  par  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ .

D'après la question précédente on a  $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ .

La fonction  $f$  étant continue sur  $[0; 1]$ , d'après le théorème de la moyenne (auss appelé théorème des sommes de Riemann),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Donc  $S(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$ .

5. D'après la question 3. utilisée avec  $x = 2$  et en faisant tendre  $p$  vers  $+\infty$ , on a :

$$\begin{aligned}
S(2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$