

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 14

1. a) Posons $V = -\ln(U)$. On sait que $U(\Omega) =]0; 1]$, donc $V(\Omega) = [0; +\infty[$.

Notons F_V la fonction de répartition de $V = -\ln(U)$. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_V(x) = P(-\ln(U) \leq x)$.

Si $x < 0$, $F_V(x) = P(V \leq x) = 0$ car $[V \leq x]$ est impossible.

Pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P(-\ln(U) \leq x) \\ &= P(U \geq e^{-x}) && \text{exp strictement croissante} \\ &= 1 - P(U < e^{-x}) \\ &= 1 - P(U \leq e^{-x}) && U \text{ VAR à densité} \\ &= 1 - e^{-x} && e^{-x} \in]0; 1] \end{aligned}$$

En résumé, $F_V(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

On reconnaît la fonction de répartition d'une VAR à densité suivant une loi exponentielle de paramètre 1, donc $-\ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

- b) `from random import random`
`from math import log`

```
def Y(n):  
    return max([-log(random()) for _ in range(n)])
```

- c) `def espY(n):`
 `E=0`
 `for _ in range(1000):`
 `E+=Y(n)/1000`
 `return E`

```
def S(n):  
    s=0  
    for k in range(1,n+1):  
        s+=1/k  
    return s
```

```
N=[n for n in range(1,100)]  
L=[espY(n)/S(n) for n in N]  
print(L)
```

Les valeurs affichées dans la liste L sont très proches de 1. On peut donc penser que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(Y_n)}{S_n} = 1$.

2. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = P(Y_n \leq x)$.

Comme les variables X_k sont à valeurs dans $[0; +\infty[$, Y_k est aussi à valeurs dans $[0; +\infty[$. Donc, pour $x < 0$, $F_n(x) = 0$.

Pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P([X_1 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x]) \\ &= P(X_1 \leq x) \times \dots \times P(X_n \leq x) && \text{par indépendance des } X_k \\ &= (1 - e^{-x})^n && \text{car les } X_k \text{ suivent toutes la même loi} \end{aligned}$$

Pour résumer, on a bien $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

La fonction $x \mapsto 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty; 0[$ et la fonction $x \mapsto (1 - e^{-x})^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction F_n est donc aussi continue sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_n(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_n(x) = F_n(0)$ donc F_n est aussi continue en 0. Ainsi, F_n est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc Y_n est une variables à densité et on obtient une densité de Y_n en dérivant F_n là où c'est possible et en « complétant » par une valeur arbitraire positive les points « manquants ».

Une densité de Y_n est la fonction f_n définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ne^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

3. a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $\forall u \in [0; 1], (1 - u)^n \geq 1 - nu$ ».

Pour $n = 0$, $(1 - u)^0 = 1$ et $1 - 0u = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

On a alors

$$(1 - u)^{n+1} = (1 - u)^n \times (1 - u) \geq (1 - nu) \times (1 - u),$$

car $1 - u \geq 0$.

Or $(1 - nu)(1 - u) = 1 - (n + 1)u + nu^2 \geq 1 - (n + 1)u$ car $nu^2 \geq 0$.

Donc $(1 - u)^{n+1} \geq 1 - (n + 1)u$, c'est-à-dire $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Grâce au principe de récurrence on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $u \in [0; 1]$, $(1 - u)^n \geq 1 - nu$.

Autre méthode : étudier la fonction $u \mapsto (1 - u)^n + nu - 1$ sur $[0; 1]$.

- b) $\int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))dx$ est impropre en $+\infty$ car $x \mapsto 1 - F_n(x)$ est continue sur $[0; +\infty[$.

Pour tout $x \geq 0$, $e^{-x} \in [0; 1]$ donc $(1 - e^{-x})^n \geq 1 - ne^{-x}$.

On en déduit donc que pour tout $x \geq 0$:

$$0 \leq 1 - F_n(x) \leq ne^{-x}.$$

Or on sait que $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ est une intégrale convergente. Donc d'après le théorème de comparaison

pour les intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))dx$ est une intégrale convergente.

De plus, $0 \leq x(1 - F_n(x)) \leq nxe^{-x}$. Or, d'après les croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$, donc par encadrement de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F_n(x)) = 0$.

4. a) On pose, pour tout $x \in [0; A]$:

$$\begin{aligned} u(x) &= -x & u'(x) &= -1 \\ v'(x) &= -f_n(x) & v(x) &= 1 - F_n(x) \end{aligned}$$

La fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; A]$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^A x f_n(x) dx &= [-x(1 - F_n(x))]_0^A + \int_0^A (1 - F_n(x)) dx \\ &= \int_0^A (1 - F_n(x)) dx - A(1 - F_n(A)). \end{aligned}$$

- b) D'après la question 3. (b), $\int_0^A (1 - F_n(x))dx$ admet une limite finie lorsque $A \rightarrow +\infty$ et $\lim_{A \rightarrow +\infty} A(1 - F_n(A)) = 0$.

Donc $\int_0^{+\infty} x f_n(x) dx$ est convergente et $\int_0^{+\infty} x f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(x)) dx$.

Comme f_n est nulle sur $] -\infty; 0[$, $\int_{-\infty}^0 x f_n(x) dx$ est convergente et nulle.

Donc Y_n admet une espérance et $E(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(x)) dx$.

5. On souhaite donc effectuer le changement de variable $t = 1 - e^{-x}$. La fonction $x \mapsto 1 - e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$, strictement croissante et à valeurs dans $[0; 1[$. De plus $dt = e^{-x}dx$.

D'après le théorème de changement de variable généralisé on a donc

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \int_0^{+\infty} (1 - (1 - e^{-x})^n) dx \\ &= \int_0^1 (1 - t^n) \times \frac{1}{1-t} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^n}{1-t} dt. \end{aligned}$$

Or on sait que pour tout $t \in]0; 1[$, $\frac{1 - t^n}{1-t} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k$.

Donc

$$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = S_n.$$