

DEVOIR MAISON N° 12

À RENDRE LE 12 JANVIER 2026

EXERCICE 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt$ si $x > 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

1. a) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, \forall t \in [0; x], \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{2}$.
b) Établir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\frac{1}{e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.
c) En déduire que la fonction f est continue (à droite) en 0.
2. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$, puis vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire : $f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x)$, où g est une fonction que l'on déterminera.
b) Étudier les variations, puis le signe de la fonction g . En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
3. a) Montrer que, pour tout réel t positif, on a : $\frac{t}{e^t + 1} \leq 1$.
b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 :

Soit $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer I_0 .
2. a) Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Établir que la suite (I_n) est décroissante.
c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
3. a) Justifier l'égalité : $x^n \ln(1+x) \leq x^n$ pour tout $x \in [0; 1]$.
b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
4. a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

- b) Montrer que $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2}$ et en déduire un encadrement de I_n .
- c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.