

# *Réduction des endomorphismes et des matrices*

## Table des matières

|            |                                                                            |           |
|------------|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice</b>                | <b>2</b>  |
| 1          | Valeurs propres, vecteurs propres, sous espaces propres, spectre . . . . . | 2         |
| 2          | Caractérisations . . . . .                                                 | 3         |
| 3          | Des exemples... . . . .                                                    | 4         |
| <b>II</b>  | <b>Les propriétés utiles des éléments propres</b>                          | <b>6</b>  |
| 1          | Autour des valeurs propres . . . . .                                       | 6         |
| 2          | Autour des vecteurs propres . . . . .                                      | 8         |
| 3          | Autour des sous-espaces propres . . . . .                                  | 10        |
| <b>III</b> | <b>Matrice ou endomorphisme diagonalisable</b>                             | <b>11</b> |
| 1          | Définition . . . . .                                                       | 11        |
| 2          | Les théorèmes de diagonalisation . . . . .                                 | 11        |
| 3          | Comment diagonaliser une matrice? . . . . .                                | 14        |
| 4          | Comment diagonaliser un endomorphisme? . . . . .                           | 17        |
| <b>IV</b>  | <b>Application de la réduction au calcul de puissance de matrices</b>      | <b>19</b> |
| 1          | Rappels : formules du binôme . . . . .                                     | 19        |
| 2          | Puissances d'une matrice diagonalisable . . . . .                          | 19        |

Dans tout ce chapitre  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On rappelle que  $\text{id}_E$  désigne l'endomorphisme identité de  $E$  et  $I_n$  désigne la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

## I Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

### 1 Valeurs propres, vecteurs propres, sous espaces propres, spectre

#### Définition 1 : Pour les endomorphismes

- Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On dit qu'un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de l'endomorphisme  $f$  si, et seulement s'il existe un vecteur  $\vec{u} \in E$  tel que :

$$\begin{cases} \vec{u} \neq \vec{0}_E ; \\ f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} . \end{cases}$$

Un vecteur  $\vec{u}$  vérifiant ces deux critères est appelé un **vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$** .

- Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On pose :

$$E_\lambda(f) = \{ \vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \} = \ker(f - \lambda \text{id}_E).$$

$E_\lambda(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  appelé **sous-espace propre de  $f$  associé à  $\lambda$** .

- L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est appelé **spectre** et est noté  $\text{sp}(f)$ .

#### Définition 2 : Pour les matrices carrées

- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit qu'un scalaire  $\lambda$  est une **valeur propre** de la matrice  $A$  si, et seulement s'il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  tel que :

$$\begin{cases} X \neq 0 ; \\ AX = \lambda X . \end{cases}$$

Un vecteur colonne  $X$  vérifiant ces deux critères est appelé un **vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$** .

- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On pose :

$$E_\lambda(A) = \{ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / AX = \lambda X \} = \ker(A - \lambda I_n).$$

$E_\lambda(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  appelé **sous-espace propre de  $A$  associé à  $\lambda$** .

- L'ensemble des valeurs propres d'une matrice est appelé **spectre** et est noté  $\text{sp}(A)$ .

#### Remarque :

Lorsque  $\lambda$  est une valeur propre, le sous-espace propre associé à  $\lambda$  réunit **TOUS** les vecteurs propres associés à  $\lambda$  **ET** le vecteur nul (qui n'est pas un vecteur propre!!!!!!).

**Théorème 1 : Caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme**Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{sp}(f) &\iff \exists \vec{u} \in E \text{ tel que } \vec{u} \neq \vec{0}_E \text{ et } f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \\ &\iff \text{l'équation } f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \text{ admet une infinité de solutions} \\ &\hspace{15em} (\text{inconnue } \vec{u} \in E) \end{aligned}$$

$$\iff \ker(f - \lambda \text{id}_E) \neq \{\vec{0}_E\}$$

$$\iff E_\lambda(f) \neq \{\vec{0}_E\}$$

$$\iff f - \lambda \text{id}_E \text{ n'est pas injective}$$

$$\text{si } E \text{ est de dimension finie} \quad \left\{ \begin{array}{l} \iff f - \lambda \text{id}_E \text{ n'est pas bijective} \\ \iff \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) < \dim(E) \\ \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f - \lambda \text{id}_E) \text{ n'est pas inversible} \\ \iff \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f - \lambda \text{id}_E)) < \dim(E) \end{array} \right.$$

$$\text{si } \dim(E) = 2 \quad \iff \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f - \lambda \text{id}_E)) = 0.$$

**Théorème 2 : Caractérisation des valeurs propres d'une matrice carrée**Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{sp}(A) &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tel que } X \neq 0 \text{ et } AX = \lambda X \\ &\iff \text{l'équation } AX = \lambda X \text{ admet une infinité de solutions (inconnue } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})) \\ &\iff \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \\ &\iff E_\lambda(A) \neq \{0\} \\ &\iff A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \text{rg}(A - \lambda I_n) < n \\ \text{si } n = 2 &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \end{aligned}$$

**Théorème 3 : Caractérisation des vecteurs propres d'un endomorphisme**Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ est un vecteur propre de } f &\iff \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \text{ (avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ une constante)} \\ &\iff \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{u} \in \ker(f - \lambda \text{id}_E) \text{ (avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ une constante)} \\ &\iff \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{u} \in E_\lambda(f) \text{ (avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ une constante)} \end{aligned}$$

**Théorème 4 : Caractérisation des vecteurs propres d'une matrice**Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$$\begin{aligned} X \text{ est un vecteur propre de } A &\iff X \neq 0 \text{ et } AX = \lambda X \text{ (avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ une constante)} \\ &\iff X \neq 0 \text{ et } X \in \ker(A - \lambda I_n) \text{ (avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ une constante)} \\ &\iff X \neq 0 \text{ et } X \in E_\lambda(A) \text{ (avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ une constante)} \end{aligned}$$

**Exemple 1 : Montrer qu'un vecteur donné est vecteur propre**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $X$  est un vecteur propre de  $A$  et déterminer la valeur propre associée.

On a  $X \neq 0$  et  $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Donc  $X \neq 0$  et  $AX = 0X$  c'est-à-dire  $X$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 0.

**Exemple 2 : Montrer qu'un réel donné est valeur propre, trouver un sous-espace propre**

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$  définie par,  $f(P) = (X^2 - 1)P' - (2X + 1)P$ .

1. Montrer que  $(X - 1)^2$  est un vecteur propre de  $f$ .
2. Montrer que  $-1$  est une valeur propre de  $f$  et déterminer une base du sous-espace propre associé à  $-1$ .
1. On a  $f((X - 1)^2) = (X^2 - 1)2(X - 1) - (2X + 1)(X - 1)^2 = (2(X + 1) - (2X + 1))(X - 1)^2 = (X - 1)^2$ .  
Comme  $(X - 1)^2 \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ ,  $(X - 1)^2$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre 1.
2. On peut répondre ici aux deux parties de la question avec un seul et même calcul, la résolution de l'équation  $f(P) = -P$  !!!

Soit  $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ . On a

$$\begin{aligned} f(P) = -P &\Leftrightarrow (X^2 - 1)(2aX + b) - (2X + 1)(aX^2 + bX + c) = -aX^2 - bX - c \\ &\Leftrightarrow (-b - a)X^2 + (-2a - b - 2c)X - c - b = -aX^2 - bX - c \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -b - a = -a \\ -2c - b - 2a = -b \\ -c - b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -a \end{cases}. \end{aligned}$$

L'équation  $f(P) = -P$  admet une infinité de solutions donc  $-1$  est une valeur propre de  $f$ .

De plus  $E_{-1}(f) = \{aX^2 - a/a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X^2 - 1)$ .

La famille  $(X^2 - 1)$  est génératrice de  $E_{-1}(f)$  et libre car formée d'un seul vecteur non nul. Donc  $(X^2 - 1)$  est une base de  $E_{-1}(f)$ .

**Exemple 3 : Trouver TOUTES les valeurs propres d'un endomorphisme en dimension finie**

On considère l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_1[X]$  défini par  $f(P) = (2X - 1)P' - P + P(0)X$ .

Déterminer les valeurs propres de  $f$ .

On commence pour cela par déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_1[X]$ ,  $\mathcal{B}_c = (1, X)$ .

On a  $f(1) = -1 + X$  et  $f(X) = (2X - 1) - X + 0 = X - 1$ .

Donc  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

On sait que  $\lambda \in \text{sp}(f) \iff \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) - \lambda I_2) = 0$ .

Or on a  $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) - \lambda I_2) = (-1 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = \lambda^2$ .

Donc  $\lambda \in \text{sp}(f) \iff \lambda = 0$  et donc  $\text{sp}(f) = \{0\}$ .

**Exemple 4 : Trouver TOUTES les valeurs propres d'une matrice carrée**

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ .

Déterminer les valeurs propres de  $A$ .

On sait que  $\lambda \in \text{sp}(A) \Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$ .

Par opérations élémentaires :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1 - \lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 - \lambda \\ 2 & 1 - \lambda & -2 \\ 1 - \lambda & 2 & -2 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 - \lambda \\ 0 & -1 - \lambda & \lambda + 1 \\ 0 & 2\lambda + 2 & -\lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - (1 - \lambda)L_1 \end{array} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 - \lambda \\ 0 & -1 - \lambda & \lambda + 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 + 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{sp}(A) &\Leftrightarrow -1 - \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad -\lambda^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 1. \end{aligned}$$

Ainsi  $\text{sp}(A) = \{-1; 1\}$ .

**Exemple 5 : Trouver TOUTES les valeurs propres d'une matrice carrée**

Déterminer les valeurs propres de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

Comme  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on sait que  $\lambda \in \text{sp}(A) \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0$ .

Or, on a :

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4.$$

On remarque alors que dans  $\mathbb{R}$ ,  $\lambda^2 + 4 \neq 0$ .  $A$  n'admet donc pas de valeurs propres réelles.

Dans  $\mathbb{C}$ ,  $\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2i$  ou  $-2i$  donc  $A$  admet deux valeurs propres complexes,  $2i$  et  $-2i$ .

*Il faudra bien lire l'énoncé pour savoir si on cherche les valeurs propres dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .*

**Exemple 6 : Trouver TOUTES les valeurs propres d'un endomorphisme en dimension infinie**

On pose  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et on considère  $T$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  $T(f) = f''$ .

Déterminer toutes les valeurs propres de  $T$ .

On cherche donc les réels  $\lambda$  pour lesquels il existe une fonction  $f \in E$  non nulle telle que :

$$T(f) = \lambda f.$$

Or  $T(f) = \lambda f \Leftrightarrow f'' - \lambda f = 0$ .

Quelle que soit la valeur de  $\lambda \in \mathbb{R}$ , cette équation (différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants) admet des fonctions non nulles comme solution.

Donc tous les réels sont des valeurs propres de  $T$  :  $\text{sp}(T) = \mathbb{R}$ .

## II Les propriétés utiles des éléments propres

### 1 Autour des valeurs propres

#### **Théorème 5 : La valeur propre 0**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

$$\begin{aligned} 0 \in \text{sp}(f) &\iff \exists \vec{u} \in E \text{ tel que } \vec{u} \neq \vec{0}_E \text{ et } f(\vec{u}) = \vec{0}_E \\ &\iff \text{l'équation } f(\vec{u}) = \vec{0}_E \text{ admet une infinité de solutions} \\ &\hspace{15em} (\text{inconnue } \vec{u} \in E) \end{aligned}$$

$$\iff \ker(f) \neq \{\vec{0}_E\}$$

$$\iff E_0(f) \neq \{\vec{0}_E\}$$

$$\iff f \text{ n'est pas injective}$$

$$\text{si } E \text{ est de dimension finie} \left\{ \begin{array}{l} \iff f \text{ n'est pas bijective} \\ \iff \text{rg}(f) < \dim(E) \\ \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ n'est pas inversible} \\ \iff \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) < \dim(E) \end{array} \right.$$

$$\text{si } \dim(E) = 2 \iff \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = 0.$$

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$$0 \in \text{sp}(A) \iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tel que } X \neq 0 \text{ et } AX = 0$$

$$\iff \text{l'équation } AX = 0 \text{ admet une infinité de solutions (inconnue } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$$

$$\iff \ker(A) \neq \{0\}$$

$$\iff E_0(A) \neq \{0\}$$

$$\iff A \text{ n'est pas inversible}$$

$$\iff \text{rg}(A) < n$$

$$\text{si } n = 2 \iff \det(A) = 0$$

#### Conseils méthodologiques :

Il est indispensable de savoir repérer très très vite si 0 est une valeur propre de  $f$  ou  $A$ !

#### Exemples 7 :

— La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$  n'est visiblement pas inversible car la somme des deux premières lignes est égale à la troisième, donc  $0 \in \text{sp}(A)$ .

— La matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 7 \\ -5 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$  n'est visiblement pas inversible car elle possède une colonne de 0, donc  $0 \in \text{sp}(A)$ .

— La matrice  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$  n'est visiblement pas inversible car toutes ses lignes sont identiques, donc  $0 \in \text{sp}(A)$ .

**Propriété 1**

Les valeurs propres d'une matrice **triangulaire** sont ses éléments diagonaux.

**Démonstration :**

Si  $A$  est triangulaire alors  $A - \lambda I_n$  est aussi triangulaire et ses éléments diagonaux sont :

$$a_1 - \lambda, \quad a_2 - \lambda, \dots, \quad a_n - \lambda,$$

où les  $a_i$  sont les éléments diagonaux de  $A$ .

On voit donc que  $A - \lambda I_n$  est de rang strictement inférieur à  $n$  si, et seulement si, il existe  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que  $\lambda = a_i$ .

□

**Remarque :**

Cette propriété vaut pour les matrices diagonales qui sont un cas particulier des matrices triangulaires.

**Exemple 8 :**

On considère l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  défini par  $f(P) = (X - 1)P' + P$ .

Déterminer les valeurs propres de  $f$ .

Pour cela commençons par écrire la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(X) &= 2X - 1 \\ f(X^2) &= 3X^2 - 2X \end{aligned} \implies \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice de  $f$  étant triangulaire on peut lire directement les valeurs propres sur la diagonale.

Donc  $\text{sp}(f) = \{1; 2; 3\}$ .

**Propriété 2**

On suppose que  $E$  est de dimension finie  $n$ .

Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ . Alors :

—  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  si, et seulement si,  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ . Autrement dit :

$$\text{sp}(f) = \text{sp}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)).$$

—  $\vec{u} \in E$  est un vecteur propre de  $f$  associé à  $\lambda$  si, et seulement si, la matrice colonne  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u})$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**ATTENTION :**  $E_{\lambda}(f) \neq E_{\lambda}(A)!!!!$

**Démonstration :**

- On sait que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda I_n) = \text{rg}(A - \lambda I_n)$ .  
Donc  $\text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) < \dim(E) \iff \text{rg}(A - \lambda I_n) < n$ , c'est-à-dire  $\lambda \in \text{sp}(f) \iff \lambda \in \text{sp}(A)$ .
- On sait aussi que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $\vec{u} \in E$ ,

$$f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \iff A \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}).$$

De plus,  $\vec{u} \neq \vec{0}_E \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}) \neq 0$ .

Donc  $\vec{u}$  est un vecteur propre de  $f$  associé à  $\lambda$  est bien équivalent au fait que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u})$  soit un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$ .

□

### Conseils méthodologiques :

Chercher les valeurs propres d'un endomorphisme ou de sa matrice dans une base donnée revient au même.

**Attention :** les valeurs propres de  $A$  et  $f$  sont les mêmes mais il ne faut pas confondre les vecteurs propres de  $f$  (qui sont des éléments de  $E$ ) et les vecteurs propres de  $A$  (qui sont des éléments de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ) !

### Corollaire 1

Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres (mais pas nécessairement les mêmes vecteurs propres).

### Démonstration :

Deux matrices semblables sont associées au même endomorphisme mais dans deux bases différents.

□

## 2 Autour des vecteurs propres

### Théorème 6

Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres **distinctes** de  $f$  et  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$  des vecteurs propres respectivement associés à  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ .

Alors  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$  est une famille libre de  $E$ .

### Démonstration :

On pose, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{P}(p)$  : « si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont des valeurs propres distinctes de  $f$  alors  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$  est une famille libre de  $E$  ».

- Pour  $p = 1$  : la propriété est bien vérifiée pour  $p = 1$  car un vecteur seul et non nul (un vecteur propre n'est jamais nul) forme une famille libre.
- Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  fixé. Supposons que  $\mathcal{P}(p)$  est vraie :

On considère maintenant la famille de vecteurs propres  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{p+1})$  associés aux valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$ .

On cherche tous les scalaires  $(a_1, \dots, a_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1}$  tels que :  $\sum_{k=1}^{p+1} a_k \vec{u}_k = 0$  (1).

On applique  $f$  à cette égalité, ce qui nous donne :  $\sum_{k=1}^{p+1} a_k \lambda_k \vec{u}_k = 0$  (2).

En faisant  $\lambda_{p+1}(1) - (2)$  on obtient :  $\sum_{k=1}^p (\lambda_{p+1} - \lambda_k) a_k \vec{u}_k = 0$ .

Or la famille  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$  est libre (d'après l'hypothèse de récurrence), on a donc pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ ,

$a_k(\lambda_{p+1} - \lambda_k) = 0$ , or  $\lambda_k \neq \lambda_{p+1}$  donc on a bien  $a_k = 0$ . En réinjectant ces  $a_k$  dans la première égalité on obtient aussi  $a_{p+1} = 0$ .

Ainsi  $\mathcal{P}(p+1)$  est vérifiée.

- Grâce au principe de récurrence on a montré que  $\mathcal{P}(p)$  est vraie  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ .

□

### Corollaire 2

On suppose que  $E$  est de dimension finie  $n$  et que  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont  $n$  valeurs propres **distinctes** de  $f$  et si  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres alors la famille  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  est une base de  $E$ .

On dit que c'est une **base de vecteurs propres**.

### Remarque :

La démonstration de ce corollaire est immédiate car le théorème précédent nous dit que la famille  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  est libre et de plus  $\text{card}((\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)) = \dim(E)$ .

### Propriété 3

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $E$  est de dimension finie alors :

$$\text{card}(\text{sp}(f)) \leq \dim(E).$$

### Démonstration :

Il s'agit aussi d'une conséquence directe du théorème précédent car dans un espace de dimension  $n$ , on ne peut pas avoir de famille libre de strictement plus de  $n$  vecteurs.

□

### Théorème 7

Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$ , et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres **distinctes** de  $f$ .

Une famille obtenue en juxtaposant des bases des sous-espaces propres  $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_p}(f)$  est une famille libre de  $E$ .

### Démonstration : à travailler en autonomie

Notons  $\mathcal{B}_1 = (e_{1,1}, \dots, e_{1,\alpha_1})$  une base de  $E_{\lambda_1}(f)$ ,  $\mathcal{B}_2 = (e_{2,1}, \dots, e_{2,\alpha_2})$  une base de  $E_{\lambda_2}(f)$ ,  $\dots$ ,  $\mathcal{B}_p = (e_{p,1}, \dots, e_{p,\alpha_p})$  une base de  $E_{\lambda_p}(f)$ .

On cherche tous les scalaires  $(a_{1,1}, \dots, a_{1,\alpha_1}, a_{2,1}, \dots, a_{2,\alpha_2}, \dots, a_{p,1}, \dots, a_{p,\alpha_p})$  tels que :

$$\underbrace{a_{1,1}e_{1,1} + \dots + a_{1,\alpha_1}e_{1,\alpha_1}}_{y_1} + \underbrace{a_{2,1}e_{2,1} + \dots + a_{2,\alpha_2}e_{2,\alpha_2}}_{y_2} + \dots + \underbrace{a_{p,1}e_{p,1} + \dots + a_{p,\alpha_p}e_{p,\alpha_p}}_{y_p} = 0$$
$$\Leftrightarrow y_1 + y_2 + \dots + y_p = 0$$

Montrons que tous les  $y_i$  sont nuls. Supposons pour cela qu'il existe des  $y_i$  qui ne sont pas nuls. On note  $y_{j_1}, \dots, y_{j_k}$  tout les  $y_i$  qui ne sont pas nuls. On a donc  $y_{j_1} + \dots + y_{j_k} = 0$ .

$y_{j_1}, \dots, y_{j_k}$  sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes donc ils forment une famille libre.

Ceci contredit l'égalité  $y_{j_1} + \dots + y_{j_k} = 0$ .

Ainsi tous les  $y_i$  sont nuls et donc on obtient que tous les coefficients  $a_{...}$  sont nuls.

□

Toutes les propriétés précédentes peuvent aussi être énoncées pour des matrices :

### Propriété 4

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont des valeurs propres distinctes de  $A$  et  $X_1, \dots, X_p$  des vecteurs propres colonnes associés, alors  $(X_1, \dots, X_p)$  est une famille libre de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .
- Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des valeurs propres distinctes de  $A$  et  $X_1, \dots, X_n$  des vecteurs propres colonnes associés, alors  $(X_1, \dots, X_n)$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .
- $A$  admet au plus  $n$  valeurs propres distinctes.
- Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont des valeurs propres distinctes de  $A$ , une famille obtenue en juxtaposant des bases des sous-espaces propres  $E_{\lambda_1}(A), \dots, E_{\lambda_p}(A)$  est une famille libre de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

**Propriété 5**

On suppose que  $E$  est de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

- Soit  $\lambda \in \text{sp}(f)$ . Alors  $\dim(E_\lambda(f)) \geq 1$ .
- Soit  $\lambda \in \text{sp}(f)$ . Alors  $\dim(E_\lambda(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E)$ .
- Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres **distinctes** de  $f$ . Alors :

$$\dim(E_{\lambda_1}(f)) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}(f)) \leq \dim(E).$$

**Démonstration :**

- Comme  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ , on a  $E_\lambda(f) \neq \{\vec{0}_E\}$  et donc  $\dim(E_\lambda(f)) \geq 1$ .
- $f - \lambda \text{id}_E$  est une application linéaire et  $E$  est de dimension finie, donc, d'après le théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f - \lambda \text{id}_E)) + \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) \iff \dim(E_\lambda(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E).$$

- Le résultat découle du théorème 7. En juxtaposant des bases des sous-espaces propres on obtient une famille libre de  $E$  et donc cette famille ne peut pas contenir plus de  $\dim(E)$  vecteurs.

□

**Propriété 6**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Soit  $\lambda \in \text{sp}(A)$ . Alors  $\dim(E_\lambda(A)) \geq 1$ .
- Soit  $\lambda \in \text{sp}(A)$ . Alors  $\dim(E_\lambda(A)) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$ .
- Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres **distinctes** de  $A$ . Alors :

$$\dim(E_{\lambda_1}(A)) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}(A)) \leq n.$$

**Exemple 9 :**

On reprend la matrice  $A$  de l'exemple 4 :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ . Nous avons vu que  $\text{sp}(A) = \{-1; 1\}$ .

Déterminer, avec un minimum de calculs, la dimension des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de  $A$ .

*Il est astucieux ici d'utiliser le fait que :*

$$\dim(E_\lambda(A)) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n).$$

Comme  $E_1(A) = \ker(A - I_3)$ , on sait que  $\dim(E_1(A)) = 3 - \text{rg}(A - I_3)$ .

Or d'après nos calculs fait précédemment,  $\text{rg}(A - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ .

Donc  $\dim(E_1(A)) = 3 - 2 = 1$ .

De même,  $\text{rg}(A + I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ . Donc  $\dim(E_{-1}(A)) = 3 - 1 = 2$ .

### III Matrice ou endomorphisme diagonalisable

Dans toute cette partie  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie.

#### 1 Définition

##### Définition 3

- Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $f$  est **diagonalisable** si, et seulement s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.
- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est une **matrice diagonalisable** si, et seulement s'il existe une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .

##### Remarque :

Deux problèmes se posent donc :

- Comment savoir si une matrice ou un endomorphisme est diagonalisable ? (cf. partie III.2.)
- Lorsqu'une matrice est diagonalisable comment construire des matrices  $P$  et  $D$  telles que  $P$  est inversible,  $D$  diagonale et  $A = PDP^{-1}$ , ou lorsqu'un endomorphisme est diagonalisable comment construire une base dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale ? (cf. parties III.3. et 4.)

#### 2 Les théorèmes de diagonalisation

Le but de cette partie est donc de savoir répondre à la question : «  $f$  (ou  $A$ ) est-il diagonalisable ? ».

##### Théorème 8 : CNS de diagonalisation

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  (respectivement  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ). On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  **toutes les valeurs propres distinctes** de  $f$  (respectivement de  $A$ ).

Alors,  $f$  (respectivement  $A$ ) est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $f$  (respectivement  $A$ ) vaut  $\dim(E)$  (respectivement le nombre de ligne de  $A$ ).

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim(E).$$

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}(A)) = n \quad (= \text{taille de } A).$$

##### Démonstration : à travailler en autonomie

$\Leftarrow$  :

On suppose que  $\sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}(f)) = n$ . Soit  $\mathcal{B}_i$  une base du sous-espace propre  $E_{\lambda_i}(f)$ .

On note alors  $\mathcal{B}$  la famille obtenue en juxtaposant les bases  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ .

D'après le théorème 7, la famille  $\mathcal{B}$  est libre et de plus :

$$\text{card}(\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^k \text{card}(\mathcal{B}_i) = \sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}(f)) = n.$$

Donc  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ . Reprenons alors les notations du théorème 7 : notons  $\mathcal{B}_1 = (e_{1,1}, \dots, e_{1,\alpha_1})$  une base de  $E_{\lambda_1}(f)$ ,  $\mathcal{B}_2 = (e_{2,1}, \dots, e_{2,\alpha_2})$  une base de  $E_{\lambda_2}(f)$ , ...,  $\mathcal{B}_k = (e_{k,1}, \dots, e_{k,\alpha_k})$  une base de  $E_{\lambda_k}(f)$ .

Par construction de ces bases, on a :

$$\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1; \alpha_i \rrbracket, \quad f(e_{i,j}) = \lambda_i e_{i,j}.$$

$$\text{Donc } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & & & & \vdots \\ & & & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \lambda_{k-1} \\ & & & & & & \lambda_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}, \text{ c'est-à-dire } f \text{ est diagonalisable.}$$

$\Rightarrow :$

On suppose cette fois-ci que  $f$  est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale. Les éléments diagonaux de cette matrice sont les valeurs propres de  $f$ .

Ainsi, quitte à réorganiser cette base, on peut considérer que l'on peut trouver une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que la matrice de  $f$  est comme ci-dessus.

On a donc  $\dim(E_{\lambda_i}(f)) = \text{nombre de fois où } \lambda_i \text{ apparaît sur la diagonale}$ .

Et ainsi,  $\sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}(f)) = n$ .

□

### Conseils méthodologiques :

Ce théorème permettra **toujours** de répondre à la question «  $f$  (ou  $A$ ) est-il diagonalisable ? ».

Il existe deux **cas particulier** qui permettent de répondre à cette même question plus rapidement.

### **Théorème 9 : CS n° 1 de diagonalisation**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  (respectivement  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ).

**Si**  $f$  (respectivement  $A$ ) admet  $n$  valeurs propres distinctes **alors**  $f$  (respectivement  $A$ ) est diagonalisable.

### Remarques :

- **Attention** dans ce théorème les phrases ne sont pas des équivalences. La réciproque de ces phrases est en général fausse.
- Lorsque  $f$  admet  $n$  valeurs propres distinctes chaque sous-espace propre est obligatoirement de dimension 1.

### Démonstration :

On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $f$ .

Soit  $e_i$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$ . On a vu au corollaire 2, que  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ .

Comme  $f(e_i) = \lambda_i e_i$ , on a alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire  $f$  est diagonalisable.

□

**Théorème 10 : CS n° 2 de diagonalisation : le théorème spectral**

Si  $A$  est une matrice symétrique à coefficients réels **alors**  $A$  est diagonalisable.

**Remarque :**

Admis en BCPST.

**Propriété 7**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base quelconque de  $E$ .

$f$  est diagonalisable si, et seulement si,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est diagonalisable.

**Conseils méthodologiques :**

Si aucun travail n'a été fait avant, voici la marche à suivre pour savoir si  $A$  ou  $f$  est diagonalisable :

1. On regarde si la matrice  $A$  ou la matrice de  $f$  relative à une base est une matrice symétrique à coefficients réels. Si c'est le cas alors on peut affirmer, **sans calculs supplémentaires**, que  $f$  ou  $A$  est diagonalisable.
2. Si  $A$  ou  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  n'est pas symétrique à coefficients réels, on détermine les valeurs propres.
3. Ensuite deux situations possibles :
  - S'il y a  $n$  valeurs propres distinctes ( $n$  désignant la dimension de  $E$  ou la taille de la matrice  $A$ ) alors on peut affirmer, **sans calculs supplémentaires**, que  $f$  ou  $A$  est diagonalisable.
  - Sinon on détermine la dimension de chacun des sous-espaces propres et on regarde si la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut  $n$  ou non.

**Exemple 10 :**

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ?

Déterminons les valeurs propre de  $A$ . On sait que  $\lambda \in \text{sp}(A) \Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$ .

Par opérations élémentaires :

$$\begin{aligned}
 \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \\
 &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 - \lambda \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 - \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\
 &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 - \lambda \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda - \lambda^2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (1 - \lambda)L_1 \\
 &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 - \lambda \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda - \lambda^2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 \lambda \in \text{sp}(A) &\Leftrightarrow -\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad 2\lambda - \lambda^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 2.
 \end{aligned}$$

Ainsi  $\text{sp}(A) = \{0; 2\}$ .

Pour savoir si  $A$  est diagonalisable, il est nécessaire de déterminer la dimension des sous-espaces propres de  $A$  car nous n'avons obtenu que 2 valeurs propres alors que  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Il est astucieux ici d'utiliser le fait que :

$$\dim(E_\lambda(A)) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n).$$

Comme  $E_0(A) = \ker(A)$ , on sait que  $\dim(E_0(A)) = 3 - \text{rg}(A)$ .

Or, la matrice  $A$  possède une ligne nulle et deux lignes non nulles mais proportionnelles donc  $\text{rg}(A) = 1$ .

On a donc  $\dim(E_0(A)) = 2$ .

De même,  $\dim(E_2(A)) = 3 - \text{rg}(A - 2I_3)$ .

Or d'après nos calculs fait précédemment,  $\text{rg}(A - 2I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ . Donc  $\dim(E_2(A)) = 1$ .

En conclusion,  $\dim(E_0(A)) + \dim(E_2(A)) = 3$  et  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  donc  $A$  est diagonalisable.

### Exemple 11 :

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ?

$A$  est une matrice symétrique à coefficients réels donc, d'après le théorème spectral,  $A$  est diagonalisable.

### Exemple 12 :

On reprend l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  défini par  $f(P) = (X - 1)P' + P$ .

$f$  est-il diagonalisable ?

Dans l'exemple 8, nous avons vu que  $\text{sp}(f) = \{1; 2; 3\}$ .

On remarque alors que  $f$  admet 3 valeurs propres distinctes et que  $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$ . On peut donc affirmer que  $f$  est diagonalisable.

### Exemple 13 :

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ? dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  ?

Dans  $\mathbb{R}$ , nous avons vu que  $A$  n'admet pas de valeurs propres. Donc  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Dans  $\mathbb{C}$ ,  $A$  admet deux valeurs propres distinctes ( $2i$  et  $-2i$ ) et  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

## 3 Comment diagonaliser une matrice ?

Le but de cette partie est, étant donné une matrice  $A$  que l'on sait être diagonalisable, de trouver une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ . On appelle cela **diagonaliser** la matrice  $A$ .

### **Propriété 8**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice diagonalisable et  $\text{sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  l'ensemble de ses valeurs propres. On note de plus  $\mathcal{B}_1$  une base de  $E_{\lambda_1}(A)$ , ...,  $\mathcal{B}_p$  une base de  $E_{\lambda_p}(A)$ .

- La réunion de toutes ces bases forme une base, que l'on note  $\mathcal{B}$ , de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . On dit que  $\mathcal{B}$  est une **base de vecteurs propres** de  $A$ .
- On note alors  $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ . En posant  $P$  la matrice de passage de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  à la base  $\mathcal{B}$  et  $D$  la matrice diagonale dont le  $i^{\text{ème}}$  élément diagonal est la valeur propres associée au vecteur propres  $X_i$ , on a :

$$A = PDP^{-1}.$$

### Démonstration :

- Le premier point découle du théorème 7 car d'après ce théorème la famille  $\mathcal{B}$  est libre et de plus, comme  $A$  est diagonalisable la somme des dimension des sous-espaces propre vaut  $n$  et donc il y a  $n$  vecteurs dans la famille  $\mathcal{B}$ .  
Ainsi  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

- Notons  $d_i$  la valeur propre associée au vecteur  $X_i$  (les  $d_i$  ne sont pas forcément distincts).  
On considère de plus  $f$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  défini par  $f(X) = AX$ .  
On sait alors que  $A$  est la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et comme  $AX_i = d_i X_i$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} = D.$$

D'après la formule de changement de base, on a donc bien  $A = PDP^{-1}$  avec  $P$  matrice de passage de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  à la base de vecteurs propres  $\mathcal{B}$ .

□

### Conseils méthodologiques :

« Diagonaliser une matrice » signifie trouver une matrice  $D$  diagonale et une matrice  $P$  inversible telles que  $A = PDP^{-1}$ .

Voici un résumé de tout ce que nous avons construit jusqu'à présent (Attention dans un problème de concours il faudra s'adapter à l'ordre des questions!) :

1. Trouver les valeurs propres de  $A$  (attention à bien regarder l'énoncé de l'exercice pour savoir si on travaille dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).
2.  $A$  est-elle diagonalisable ? Quelques pistes pour répondre :
  - si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et si  $A$  admet  $n$  valeurs propres distinctes alors  $A$  est diagonalisable ;
  - sinon on détermine la dimension de chaque sous-espace propre et  $A$  est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut  $n$ .
3. Si  $A$  est diagonalisable, on construit  $P$  et  $D$  :

Si ça n'a pas été fait avant il faut trouver une base de chacun des sous-espaces propres. La réunion de toutes ces bases donne une base de vecteurs propres de  $A$ .

On construit alors  $P$  la matrice de passage de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  à la base de vecteurs propres et dans la matrice diagonale  $D$  on met les valeurs propres correspondant à chacun des vecteurs propres de la base de vecteurs propres.

*Les bases des sous-espaces propres ne sont pas uniques donc la matrice  $P$  n'est pas unique et la matrice  $D$  n'est pas unique non plus car elle dépend de l'ordre des vecteurs propres utilisés pour construire la matrice  $P$ .*

### Exemple 14 :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  $A$  est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

1. Trouver les valeurs propres :

On sait que  $\lambda \in \text{sp}(A) \iff \text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$ . Or :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -\lambda \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 3 - \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -\lambda \\ 0 & 4 - 2\lambda & -2 + \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + (3 - \lambda)L_1 \end{array} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{sp}(A) &\Leftrightarrow 4 - 2\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2.\end{aligned}$$

Donc  $\text{sp}(A) = \{1; 2\}$ .

$A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ayant deux valeurs propres donc on ne peut pour l'instant pas savoir si elle est diagonalisable.

## 2. Dimension des sous-espaces propres :

Comme  $E_1(A) = \ker(A - I_3)$ , on sait que  $\dim(E_1(A)) = 3 - \text{rg}(A - I_3)$ .

Or d'après nos calculs fait précédemment,  $\text{rg}(A - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ .

Donc  $\dim(E_1(A)) = 3 - 2 = 1$ .

De même,  $\text{rg}(A - 2I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ . Donc  $\dim(E_2(A)) = 3 - 1 = 2$ .

En conclusion,  $\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 3$  et  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  donc  $A$  est diagonalisable.

## 3. Diagonaliser $A$ :

Pour construire  $P$  il nous faut une base de  $E_1(A)$  et une base de  $E_2(A)$ .

Par définition  $E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = X\}$ . En posant  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , on a

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + z = x \\ -x + 2y - z = y \\ -2x = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -2x \end{cases}.$$

Donc  $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -2x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ .

La famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$  est une famille génératrice de  $E_1(A)$  et libre (un seul vecteur non nul) donc c'est une base de  $E_1(A)$ .

(On peut aussi justifier le fait que cette famille est une base en disant que c'est une famille génératrice de un vecteur dans un espace de dimension 1.)

De plus,  $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 2X\}$ .

$$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + z = 2x \\ -x + 2y - z = 2y \\ -2x = 2z \end{cases} \Leftrightarrow z = -x.$$

Donc  $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .

La famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  est une famille génératrice de  $E_2(A)$  et libre (deux vecteurs visiblement non proportionnels), donc c'est une base de  $E_2(A)$ .

(On peut aussi justifier le fait que cette famille est une base en disant que c'est une famille génératrice de deux vecteurs dans un espace de dimension 2.)

La famille  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  est une base de vecteurs propres de  $A$ .

On considère la matrice  $P$  de passage de la base canonique de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  à la base  $\mathcal{B}$  :  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Et on considère la matrice  $D$  contenant les valeurs propres :  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

On a alors  $A = PDP^{-1}$ .

#### 4 Comment diagonaliser un endomorphisme ?

Dans cette partie, on souhaite, étant donné un endomorphisme  $f$  diagonalisable, construire une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

Il suffit pour cela de déterminer une base de vecteurs propres en juxtaposant une base de chacun des sous-espaces propres.

##### **Conseils méthodologiques :**

« Diagonaliser un endomorphisme » signifie trouver une base dans laquelle la matrice de cet endomorphisme est diagonale et donner cette matrice diagonale.

Voici un résumé de tout ce que nous avons construit jusqu'à présent (Attention dans un problème de concours il faudra s'adapter à l'ordre des questions!) :

1. Trouver les valeurs propres de  $f$  (attention à bien regarder l'énoncé de l'exercice pour savoir si on travaille dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).
2.  $f$  est-il diagonalisable ?

*Pour ces deux premiers points on passera souvent par la matrice associée à  $f$  dans une base (souvent la base canonique).*

3. Lorsque  $f$  est diagonalisable, on construit une base de vecteurs propres : si ça n'a pas été fait avant il faut trouver une base de chacun des sous-espaces propres. La réunion de toutes ces bases donne une base de vecteurs propres de  $f$ .

La matrice de  $f$  relative à la base de vecteurs propres est alors la matrice diagonale contenant les valeurs propres de  $f$  sur sa diagonale.

**Exemple 15 :**

Reprenons l'endomorphisme du deuxième exemple du cours :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = (X^2 - 1)P' - (2X + 1)P$$

1. Trouver les valeurs propres :

Pour déterminer les valeurs propres de  $f$  il est plus simple de travailler sur une matrice associée à  $f$ . Notons  $\mathcal{B}_c$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ . On a :

$$f(1) = -2X - 1, \quad f(X) = -X^2 - X - 1, \quad f(X^2) = -X^2 - 2X.$$

Donc  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Déterminons maintenant les réels  $\lambda$  tels que  $\text{rg}(f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}_2[X]}) < 3$ .

$$\begin{aligned} \text{rg}(f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}_2[X]}) &= \text{rg} \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -1 & 0 \\ -2 & -1 - \lambda & -2 \\ 0 & -1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & -1 - \lambda & -2 \\ 0 & -1 & -1 - \lambda \\ -1 - \lambda & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_2 \leftarrow L_3 \leftarrow L_1 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & -1 - \lambda & -2 \\ 0 & -1 & -1 - \lambda \\ 0 & \lambda^2 + 2\lambda - 1 & 2(\lambda + 1) \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - (\lambda + 1)L_1 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 - \lambda \\ 0 & -1 - \lambda & -1 \\ 0 & 2(\lambda + 1) & \lambda^2 + 2\lambda - 1 \end{pmatrix} \quad C_2 \leftrightarrow C_3 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 - \lambda \\ 0 & -1 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + 2\lambda - 3 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{sp}(f) &\Leftrightarrow -1 - \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -3. \end{aligned}$$

Ainsi  $\text{sp}(f) = \{-1; 1; -3\}$ .

2.  $f$  diagonalisable ?

$f$  admet trois valeurs propres distinctes et  $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$  donc  $f$  est diagonalisable.

3. Base de vecteurs propres :

Nous avons déjà vu que  $(X - 1)^2$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 et que  $(X^2 - 1)$  est une base de  $E_{-1}(f)$ .

Valeur propre -3 :

Afin de résoudre l'équation  $f(P) = -3P$ , écrivons  $P$  sous la forme  $aX^2 + bX + c$ . On a alors :

$$f(P) = -3P \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -c - b = -3c \\ -2c - b - 2a = -3b \\ -b - a = -3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = a \end{cases}.$$

Donc  $(X + 1)^2$  est un vecteur propre associé à la valeur propre -3.

Conclusion :

La famille  $((X - 1)^2, (X + 1)^2, X^2 - 1)$  est une base de vecteurs propres de  $f$ .

Dans cette base, la matrice de  $f$  est  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

## IV Application de la réduction au calcul de puissance de matrices

### 1 Rappels : formules du binôme

#### Propriété 9

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $A$  et  $B$  commutent alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (A + B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i}.$$

#### Propriété 10

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$ . Si  $f \circ g = g \circ f$  alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (f + g)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^i \circ g^{k-i}.$$

#### Remarque :

On rappelle que pour une application linéaire  $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ .

### 2 Puissances d'une matrice diagonalisable

#### Explications :

Pour une matrice  $A$  quelconque, il n'existe pas de formule générale permettant d'exprimer  $A^k$ .

Nous allons voir ici une méthode pour calculer  $A^k$  dans le cas d'une matrice diagonalisable.

Cette méthode est basée sur la propriété ci-dessous, qu'il est presque toujours demandé de redémontrer dans les sujets de concours. La démonstration est donc à connaître par cœur.

#### Propriété 11

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices semblables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P$  une matrice inversible telle que  $A = PBP^{-1}$ , alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = PB^kP^{-1}.$$

#### Démonstration :

Montrons par récurrence que la propriété  $\mathcal{P}(k) : A^k = PB^kP^{-1}$  est vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

— **Pour  $k = 0$  :** on a d'une part  $A^0 = I_n$  et d'autre part  $PB^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = I_n$ .

Donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

— **Soit  $k \in \mathbb{N}$  fixé, supposons que  $\mathcal{P}(k)$  est vraie.**

On a alors :

$$A^{k+1} = A^k \times A = PB^kP^{-1} \times PBP^{-1} = PB^{k+1}P^{-1}.$$

Donc  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie.

— Grâce au principe de récurrence, on a montré que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k = PB^kP^{-1}$ .

□

**Propriété 12**

Soit  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice diagonale. On note  $d_1, \dots, d_n$  les éléments diagonaux de  $D$ .

$$\text{Alors pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ on a } D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}.$$

**Remarque :** On utilise ici la convention  $a^0 = 1$  pour tout  $a \in \mathbb{K}$  et  $A^0 = I_n$  pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Exemple 16 :**

Reprenons l'exemple 14 :  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

On a vu que  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Il faut être capable de redémontrer que  $A^k = PD^kP^{-1}$ .

Ensuite pour expliciter  $A^k$  il nous faut  $P^{-1}$ . Le calcul de  $P^{-1}$  donne  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

On a donc, pour tout entier  $k$  :

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2^{k+1} & 0 & -1 + 2^k \\ 1 - 2^k & 2^k & 1 - 2^k \\ 2 - 2^{k+1} & 0 & 2 - 2^k \end{pmatrix}.$$