

Partie I :

1. a) On a $A \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\alpha(\vec{a}) = (-10, -1)$.

Les vecteurs $\vec{a}$ et $\alpha(\vec{a})$ ne sont visiblement pas proportionnels donc la famille $(\vec{a}, \alpha(\vec{a}))$ est libre. Ainsi la famille $(\vec{a}, \alpha(\vec{a}))$ est une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ donc la famille $(\vec{a}, \alpha(\vec{a}))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Ainsi α est cyclique.

- b) On a $\alpha^2(\vec{a}) = \alpha(\alpha(\vec{a})) = \alpha((-10, -1))$.

Or $A \times \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -9 \end{pmatrix}$ donc $\alpha^2(\vec{a}) = (-34, -9)$.

On a alors

$$\begin{aligned} \alpha^2(\vec{a}) = x\vec{a} + y\alpha(\vec{a}) &\Leftrightarrow (-34, -9) = (2x - 10y, 3x - y) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 10y = -34 \\ 3x - y = -9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc $\alpha^2(\vec{a}) = -2\vec{a} + 3\alpha(\vec{a})$.

- c) On a : $\alpha(\vec{a}) = 0\vec{a} + 1\alpha(\vec{a})$ et $\alpha(\alpha(\vec{a})) = -2\vec{a} + 3\alpha(\vec{a})$.

Donc $A' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- d) Par définition $\ker(\alpha - 2id) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (\alpha - 2id)(x, y) = (0, 0)\}$.

Or on a

$$(\alpha - 2id)(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (A - 2I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - 6y \\ x - 3y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3y.$$

Donc $\ker(\alpha - 2id) = \{(3y, y) / y \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((3, 1))$.

La famille $((3, 1))$ est une famille génératrice de $\ker(\alpha - 2id)$ et libre (un seul vecteur non nul).

Donc $((3, 1))$ est une base de $\ker(\alpha - 2id)$.

- e) On pose $\vec{b} = (3, 1)$. D'après la question précédente $\alpha(\vec{b}) = 2\vec{b}$, donc la famille $(\vec{b}, \alpha(\vec{b}))$ n'est pas libre et n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^2$.

2. a) On peut remarquer que :

$$\text{rg}(B) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \quad L_3 \leftarrow 4L_3 - L_2$$

B est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 3 donc B est inversible.

Donc (propriété du cours) β est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^3$.

- b) D'après les propriétés de notre cours, en notant $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\beta^2 - 3\beta + 2id) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\beta)^2 - 3\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\beta) + 2\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(id) \\ &= B^2 - 3B + 2I_3 \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -18 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 0_3. \end{aligned}$$

Par unicité de la matrice représentative d'une application linéaire, on peut affirmer que $\beta^2 - 3\beta + 2id = 0$.

- c) La question précédente nous permet de dire qu'il est impossible de trouver un vecteur $\vec{x}$ tel que la famille $(\vec{x}, \beta(\vec{x}), \beta^2(\vec{x}))$ soit libre.

En effet, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, on vient de montrer que $\beta^2(\vec{x}) - 3\beta(\vec{x}) + 2\vec{x} = \vec{0}$ ce qui montre que la famille $(\vec{x}, \beta(\vec{x}), \beta^2(\vec{x}))$ est liée.

En conclusion β n'est pas cyclique.

Partie II :

1. a) Pour k tel que $1 \leq k \leq n-1$, on a : $\delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$.

Le terme de plus haute puissance est donc $\binom{k}{k-1} X^{k-1}$ et comme $\binom{k}{k-1} \neq 0$, on a donc bien montré que $\deg(\delta(X^k)) = k-1$.

- b) Soit P un polynôme quelconque de degré $p \geq 1$. On sait que $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i$, le coefficient a_p de X^p étant non nul.

On a donc

$$\begin{aligned} \delta(P) &= \sum_{i=0}^p a_i \delta(X^i) && \text{car } \delta \text{ est linéaire} \\ &= \sum_{i=1}^p a_i \delta(X^i) && \text{car } \delta(1) = 0. \end{aligned}$$

Or dans la question précédente, on a montré que pour $k \geq 1$, $\deg(\delta(X^k)) = k-1$.

Par propriété sur les degrés, on a donc $\deg(\delta(P)) = \max(\deg(a_i \delta(X^i)))$.

Comme $a_p \neq 0$, on en déduit que $\delta(P)$ est de degré $p-1$.

On a bien $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$.

- c) Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(k)$: « $\deg(\delta^k(X^{n-1})) = n-k-1$ » est vraie pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

— Pour $k=0$: comme $\delta^0(X^{n-1}) = X^{n-1}$ la propriété $\mathcal{P}(0)$ est bien vraie.

— Soit $k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. On a :

$$\begin{aligned} \deg(\delta^{k+1}(X^{n-1})) &= \deg(\delta(\delta^k(X^{n-1}))) \\ &= \deg(\delta^k(X^{n-1})) - 1 && \text{car } \deg(\delta^k(X^{n-1})) = n-k-1 \geq 1 \\ &= n-k-1-1 = n-k-2. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est bien vraie.

Grâce au principe de récurrence, on a montré que pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $\deg(\delta^k(X^{n-1})) = n-k-1$. Ainsi la famille $(X^{n-1}, \delta(X^{n-1}), \dots, \delta^{n-1}(X^{n-1}))$ est une famille de polynômes de degrés distincts, ne contenant pas le polynôme nul, donc c'est une famille libre.

De plus la famille $(X^{n-1}, \delta(X^{n-1}), \dots, \delta^{n-1}(X^{n-1}))$ contient n vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n$.

En conclusion la famille $(X^{n-1}, \delta(X^{n-1}), \dots, \delta^{n-1}(X^{n-1}))$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et ainsi δ est cyclique.

2. a) Par définition, $\ker(\delta) = \{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] / \delta(P) = 0\}$.

Or on a montré que $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$ dès que P est de degré supérieur ou égal à 1. Ainsi il n'existe aucun polynôme P de degré supérieur ou égal à 1 tel que $\delta(P) = 0$.

On a donc $\ker(\delta) \subset \mathbb{R}_0[X]$.

Inversement, on remarque facilement que si P est un polynôme constant, on a bien $\delta(P) = 0$.

Donc $\mathbb{R}_0[X] \subset \ker(\delta)$ et finalement $\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$.

b) Par définition, $\text{Im}(\delta) = \{\delta(P)/P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$.

Or on a vu que si P est constant, $\delta(P) = 0$, et si P est de degré supérieur ou égal à 1, $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1 \leq n - 1 - 1 = n - 2$.

Donc on a bien $\text{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

c) On a vu que $\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$, donc $\dim(\ker(\delta)) = 1$.

δ est une application linéaire et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est de dimension finie, donc, d'après le théorème du rang,

$$\dim(\ker(\delta)) + \dim(\text{Im}(\delta)) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n.$$

Donc $\dim(\text{Im}(\delta)) = n - 1$.

De plus, on a déjà montré que $\text{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et on vient de montrer que $\dim(\text{Im}(\delta)) = \dim(\mathbb{R}_{n-2}[X])$.

On a donc $\text{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

3. a) La famille $(R_0, \dots, R_{n-1})$ est une famille de polynômes de degrés distincts, ne contenant pas le polynôme nul, donc c'est une famille libre.

De plus la famille $(R_0, \dots, R_{n-1})$ contient n vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n$.

En conclusion la famille $(R_0, \dots, R_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) — On a :

$$\begin{aligned} \delta(R_j) &= R_j(X+1) - R_j(X) = \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (X+1-k) - \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (X-k) \\ &= \frac{1}{j!} \prod_{k=-1}^{j-2} (X-k) - \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (X-k) \quad (\text{changement d'indice dans le premier produit}) \\ &= \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j-2} (X-k) \times ((X+1) - (X-j+1)) \\ &= \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j-2} (X-k) \times j \\ &= \frac{1}{(j-1)!} \prod_{k=0}^{j-2} (X-k) = R_{j-1}(X) \end{aligned}$$

On a donc bien $\delta(R_j) = R_{j-1}$.

— On peut facilement montrer par récurrence que si $i \leq j$, $\delta^i(R_j) = R_{j-i}$ et si $i > j$, $\delta^i(R_j) = 0$.

c) D'après la question précédente, la famille $(R_{n-1}, \delta(R_{n-1}), \dots, \delta^{n-1}(R_{n-1}))$ est donc en fait la famille $(R_{n-1}, R_{n-2}, \dots, R_0)$ qui est, d'après la question 3. a), une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On a donc de nouveau démontré que δ est cyclique.