Exercices : Variables aléatoires réelles discrètes

Généralités

Exercice 1 :

Un biathlète souhaite s'entrainer au tir. Il dispose d'une infinité de cibles numérotées : C_1, C_2, C_3, ...

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la cible C_i est composée d'une zone rouge et de $i-1$ zones noires, toutes les zones ayant la même surface.

On suppose qu'à chaque tir le tireur touche la cible. Le sportif effectue un tir sur la première cible, s'il touche la zone rouge il passe à la deuxième cible et tente à nouveau d'atteindre la zone rouge, sinon l'expérience s'arrête. Le tireur continue en suivant ce schéma jusqu'à ce que l'expérience s'arrête.

On note alors X la variable aléatoire égale au numéro de la dernière cible où l'athlète a touché la zone rouge.

Dans tout l'exercice on notera, pour $i \in \mathbb{N}^*$, R_i l'événement « le biathlète effectue un tir sur la cible C_i et touche la zone rouge ».

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Soit $k \in X(\Omega)$. Exprimer l'événement $[X = k]$ à l'aide de certains des événements $(R_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. En déduire la loi de X.
3. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$.
4. Montrer que X admet une espérance et une variance et déterminer leurs valeurs.
5. Le biathlète participe à une compétition qui suit les même règles que son entrainement. À chaque tir, si le biathlète touche la zone rouge sur la cible C_n, il gagne n euros. On note Y la VAR égale au gain du biathlète à l'issue de l'expérience.
   Exprimer Y en fonction de X. En déduire le gain moyen du sportif.

Exercice 2 :

On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{\alpha}{n(n+1)} (\alpha \in \mathbb{R} \text{ fixé}).$$

1. Déterminer α afin qu'on définisse bien une loi de probabilité en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = u_n$.
2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
3. La variable aléatoire X^2 admet-elle un espérance ?
4. a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $t \in [n-1; n]$, $\dfrac{1}{n^{3/2}} \leqslant \dfrac{1}{t^{3/2}}$.
   b) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^{3/2}} \leqslant \int_1^N \frac{1}{t^{3/2}}\, dt$ puis la nature de la série de terme général $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$.
   c) La variable aléatoire $\sqrt{X}$ admet-elle un espérance ?

Exercice 3 :

On se fixe un entier naturel non nul N. Un ornithologue tente de capturer un toucan mâle dans une forêt comportant une proportion q ($q \in]0; 1[$) de femelles en procédant ainsi :

— les oiseaux sont capturés un par un avec remise en liberté dans la forêt si c'est une femelle ;

— l'expérience s'arrête à la capture du premier mâle ou après un maximum de N captures infructueuses.

On considère la VAR Y_N égale au nombre de captures nécessaires pour capturer un mâle si l'ornithologue réussit à en capturer un et égale à 0 si aucune capture n'a été couronnée de succès.

On note aussi F_i l'événement « une femelle a été capturée lors de la $i^{\text{ème}}$ capture ».

1. Donner $Y_N(\Omega)$ puis déterminer $P(Y_N = k)$ pour $k \in Y_N(\Omega)$.
2. Calculer l'espérance de Y_N.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} E(Y_N)$ et $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} V(Y_N)$.

Exercice 4 :

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. À chaque lancer la probabilité d'obtenir face est égale à $\dfrac{1}{3}$.

Les lancers sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention pour la première fois de deux piles consécutifs. Soit n un entier naturel non nul. On note p_n la probabilité de l'événement $[X = n]$.

On note de plus F_i l'événement « obtenir face au i-ème lancer ».

1. Expliciter les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$, $[X = 4]$, $[X = 5]$ à l'aide des événements F_i et $\overline{F_i}$
   Déterminer la valeur de p_1, p_2, p_3, p_4, p_5.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que :
$$\forall n \geqslant 3, \quad p_n = \frac{2}{9} p_{n-2} + \frac{1}{3} p_{n-1}$$
3. En déduire l'expression de p_n en fonction de n, pour $n \geqslant 1$.
4. Calculer $E(X)$.

Lois usuelles

Exercice 5 :

Soit n et N deux entiers naturels non nuls fixés.

Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N. On effectue n tirages successifs avec remise, et on note sous forme de n-uplet le résultat de ces n tirages.

On note Ω l'univers de cette expérience, X_k la variable aléatoire égale au numéro du jeton obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage ($k \in [\![1;n]\!]$) et Y la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.

1. Soit $k \in [\![1;n]\!]$.
   a) Déterminer la loi de X_k.
   b) Calculer pour $i \in X_k(\Omega)$, $P(X_k \leqslant i)$.
2. a) Que vaut $Y(\Omega)$?
   b) Pour tout $i \in Y(\Omega)$, exprimer l'événement $[Y \leqslant i]$ à l'aide des variables aléatoires X_k puis en déduire la valeur de $P(Y \leqslant i)$.
   c) Quelle relation a-t-on entre $P(Y = i)$, $P(Y \leqslant i)$ et $P(Y \leqslant i-1)$ lorsque i et $i-1$ appartiennent à $Y(\Omega)$?
   d) En déduire la loi de Y.
3. On note aussi Z la variable aléatoire égale au plus petit numéro obtenu.
   Écrire une fonction python appelée `MinMax` prenant N et n en entrée, simulant l'expérience et donnant en sortie le couple (Z, Y).
4. Écrire une fonction python appelée `esperance`, prenant N et n en entrée, qui calcule une valeur approchée de l'espérance de Z et de Y.

Exercice 6 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p avec $p \in \left]\frac{2}{3};1\right]$.

1. Montrer que $Y = X\mathrm{e}^{X+4}$ admet une espérance et la calculer.
2. Déterminer la probabilité de l'événement A : « la valeur prise par X est un multiple de 4 ».

Exercice 7 :

Un livre de 500 pages contient avant la première lecture un certains nombre d'erreurs typographiques.

On note Y_0 le nombre d'erreur de la page 15 avant la première lecture et on suppose que Y_0 suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$.

On effectue des lectures successives de cette page. À chaque lecture, les erreurs subsistantes peuvent être détectées (et donc corrigées) indépendamment les unes des autres, chacune avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

On note Y_i le nombre d'erreurs restant sur la page 15 après la $i^{\text{ème}}$ lecture.

1. Calculer pour j et k entiers les probabilités conditionnelles $P_{[Y_0=k]}(Y_1 = j)$. *On distinguera selon que $j \leqslant k$ ou $j > k$.*
2. En déduire la loi de Y_1, puis celle de Y_i.

Exercice 8 :

On suppose que dans la mémoire d'un smartphone, le nombre de faux 0 (c'est-à-dire de bits qui devraient être égaux à 1) est une variable aléatoire Y_1 qui suit une loi de Poisson de paramètre λ_1, et que le nombre de faux 1 (c'est-à-dire de bits qui devraient être égaux à 0) est une variable aléatoire Y_2 qui suit une loi de Poisson de paramètre λ_2, avec $\lambda_1 > \lambda_2$.

On suppose aussi que ces deux phénomènes sont indépendants.

On note Y le nombre total d'erreurs de bits.

1. Exprimer Y à l'aide de Y_1 et Y_2.
2. a) Que vaut $Y(\Omega)$?
   b) Après avoir remarqué que, pour $n \in Y(\Omega)$, $[Y = n] = \displaystyle\bigcup_{k=\ldots}^{\ldots} [Y_1 = k] \cap [Y_2 = \ldots]$ (on complètera les pointillés), calculer $P(Y = n)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. Sachant que n erreurs on été commises, quelle est la probabilité qu'il y ait eu k faux 0 ? (on distinguera deux situations.)

Exercice 9 :

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(X = n) = \alpha P(X \geqslant n).$$

1. Démontrer que la suite $(P(X = n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
2. En déduire la loi de la variable X.
3. Déterminer alors la loi de la variable $Y = 1 + X$.
4. En déduire, avec un minimum de calculs, que X admet une espérance et une variance et donner leurs valeurs.

Exercice 10 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.
Justifier que X admet une variance et la calculer.

Oraux de concours

Exercice 11 : Oral Agro-véto

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant une espérance.
   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
   $$\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)$$
   b) Montrer que $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   c) Déterminer la limite de $nP(X>n)$ quand n tend vers $+\infty$.
   d) Montrer que
   $$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$$
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N.
   On tire n boules avec remise et on note M la VAR égale au numéro maximum indiqué sur les boule tirées.
   a) Informatique : Écrire une fonction **simuler**(N,n) qui simule la variable aléatoire M.
   b) Déterminer (mathématiquement) $E(M)$.
   c) Calculer la limite de $\dfrac{E(M)}{N}$ lorsque N tend vers $+\infty$ puis donner un équivalent de $E(M)$.

Exercice 12 : Oral G2E

Soit $(b, n, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Une urne contient b boules blanches, n boules noires et r boules rouges. Un joueur tire une boule.

— Si elle est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage (avant le deuxième tirage, il reste donc $r-1$ boules rouges dans l'urne).

— Dans le cas où il fait un deuxième tirage, si la deuxième boule tirée est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un troisième tirage.

— ...

1. Pour tout entier naturel i non nul, on note B_i (respectivement N_i, R_i) l'événement : « le joueur tire une boule blanche (respectivement noire, rouge) lors du i-ème tirage ».
   On note aussi G_r l'événement : « le joueur gagne en commençant ses tirages dans une urne contenant r boules rouges ».
   a) Calculer $P(G_0)$ et $P(G_1)$.
   b) Trouver une relation entre $P(G_r)$ et $P(G_{r-1})$.
   c) Calculer $P(G_r)$.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour qu'une partie s'achève (sur une victoire ou une défaite), l'urne contenant initialement 2 boules rouges. Déterminer la loi de X.

Simulation informatique des lois usuelles

Exercice 13 :

1. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier n et simulant la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.
2. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier n et un réel $p \in]0;1[$ et simulant la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
   À l'aide d'un histogramme visualiser graphiquement l'allure de la loi d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(10, 0.3)$.
3. Écrire une fonction Python prenant en argument un réel $p \in]0;1[$ et simulant la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
   À l'aide d'un histogramme visualiser graphiquement l'allure de la loi d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{G}(0.2)$.

Correction

Correction de l'exercice 1 :

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car l'athlète va au moins réussir le premier tir (la première cible possède une zone rouge et 0 zones noires).
2. $[X = k] = R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}}$.
   Il est important de remarquer que dans cet exercice les événements R_i ne sont pas indépendants car sur une cible donnée le tir n'a pas forcément lieu, cela dépend de si on a réussit à tous les tirs précédents ou si l'expérience s'est arrêtée avant.
   D'après la formule des probabilités composées, on a :
$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times \ldots \times P_{R_1 \cap \ldots \cap R_{k-1}}(R_k) \times P_{R_1 \cap \ldots \cap R_k}(\overline{R_{k+1}}) \\ &= \frac{1}{k!} \times \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{k}{(k+1)!}. \end{aligned}$$
3. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} P(X=k) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(N+1)!}$ (somme télescopique).
   Or $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} 1 - \frac{1}{(N+1)!} = 1$, donc $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} P(X=k)$ est convergente et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$.
4. a) On sait que X admet une espérance si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} kP(X=k)$ est absolument convergente et dans ce cas $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k)$. Or pour tout $k \geqslant 1$, $kP(X=k) \geqslant 0$ donc étudier la convergence absolue ou la convergence revient au même.
   Sous réserve de convergence :
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k}{k!} - \frac{k}{(k+1)!}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$
   On reconnait des sommes de série exponentielle que l'on sait être toujours convergentes. Donc X admet une espérance et
$$E(X) = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) + (\mathrm{e} - 1 - 1) = \mathrm{e} - 1.$$
   b) On sait que X admet une variance si, et seulement si, X^2 admet une espérance, c'est-à-dire si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^2 P(X=k)$ est absolument convergente et dans ce cas $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X=k)$. Or pour tout $k \geqslant 1$, $k^2 P(X=k) \geqslant 0$ donc étudier la convergence absolue ou la convergence revient au même.
   Sous réserve de convergence de la série utilisée, on a :
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X=k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k^2}{k!} - \frac{k^2}{(k+1)!}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k(k-1)+k}{k!} - \frac{k(k+1)-(k+1)+1}{(k+1)!}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\ &\qquad - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$
   On reconnait des sommes de série exponentielle que l'on sait être toujours convergentes.
   Donc X^2 admet une espérance et
$$E(X^2) = \mathrm{e} + (\mathrm{e} - 1) - (\mathrm{e} - 1 - 1) = \mathrm{e} + 1.$$
   D'après la formule de Kœnig-Huygens, X admet donc une variance et
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \mathrm{e} + 1 - (\mathrm{e} - 1)^2 = \mathrm{e}(3 - \mathrm{e}).$$
   Astuce : au début du calcul de $E(X^2)$ on aurait pu reconnaitre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{(k+1)!} = E(X)$ *!!!*

5. D'après l'énoncé $Y = \sum_{n=1}^{X} n = \dfrac{X(X+1)}{2} = \dfrac{1}{2}(X^2 + X)$.

   On a montré que X^2 et X admettent une espérance, donc, par linéarité, Y admet une espérance et :
$$E(Y) = \frac{1}{2}(E(X^2) + E(X))\frac{\mathrm{e}+1+\mathrm{e}-1}{2} = \mathrm{e}.$$

   Le gain moyen est de e euros.

Correction de l'exercice 2 :

1. Pour que l'on définisse bien la loi d'une VAR discrète il faut et il suffit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$ et que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ soit convergente et que sa somme soit égale à 1.

   On a tout d'abord : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$ si, et seulement si $\alpha \geqslant 0$.

   De plus, pour tout $N > 0$:
$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \alpha \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \alpha - \frac{\alpha}{N+1},$$
   somme télescopique. Donc $\lim\limits_{N\to+\infty} \alpha - \dfrac{\alpha}{N+1} = \alpha$.

   Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \alpha$.

   Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente et que sa somme est égale à 1 si, et seulement si, $\alpha = 1$.

   En conclusion, on a bien une loi de probabilité pour X si, seulement si, $\alpha = 1$.

2. On remarque que $nP(X = n) = \dfrac{n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n+1}$, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} nP(X = n)$ est divergente.

   X n'admet pas d'espérance.

3. Comme X n'admet pas d'espérance on peut affirmer sans aucun calcul que X^2 n'admet pas d'espérance car un résultat de cours nous dit que si X^2 admet une espérance alors X admet une espérance.

4. a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc pour tout $t \in [n-1; n]$ on a bien $\dfrac{1}{n^{3/2}} \leqslant \dfrac{1}{t^{3/2}}$.

   b) D'après la question précédente, par croissance de l'intégrale, on a pour tout $n \in [\![2; N]\!]$:
$$\frac{1}{n^{3/2}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t.$$

   En sommant on en déduit que $\sum_{n=2}^{N} \dfrac{1}{n^{3/2}} \leqslant \int_1^N \dfrac{1}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$.

   Or $\int_1^N \dfrac{1}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{N}} \leqslant 2$.

   Donc $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^{3/2}} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \dfrac{1}{n^{3/2}} \leqslant 3$.

   La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées donc c'est une série convergente.

   c) D'après le théorème de transfert, $\sqrt{X}$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{n}P(X = n)$ est absolument convergente. Or, pour tout $n \geqslant 1$, $\sqrt{n}P(X = n) \geqslant 0$ donc étudier la convergence absolue ou la convergence revient au même.

   De plus $\sqrt{n}P(X = n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

   Comme on vient de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est convergente, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{n}P(X = n)$ est convergente et donc $\sqrt{X}$ admet une espérance.

Correction de l'exercice 3 :

1. $Y_N(\Omega) = [\![0; N]\!]$. De plus :
$$\begin{aligned}
P(Y = 0) &= P(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_N)\\
&= P(F_1) \times P_{F_1}(F_2) \times \ldots \times P_{F_1\cap\ldots\cap F_{N-1}}(F_N)\\
&= q^N\\
\forall k \in [\![1; N]\!],\ P(Y = k) &= P(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k})\\
&= P(F_1) \times P_{F_1}(F_2) \times \ldots \times P_{F_1\cap\ldots\cap F_{k-1}}(\overline{F_k})\\
&= (1-q)q^{k-1}
\end{aligned}$$

Une grosse bêtise serait de parler de loi géométrique!!! Il n'y a pas une succession ILLIMITÉE d'expériences. Les événements F_i ne sont pas indépendants car ils n'ont pas forcément lieu, cela dépend de ce qui s'est passé avant.

2. Y_N est une VAR finie donc elle admet une espérance.

$$\begin{aligned}E(Y_N) &= \sum_{k=0}^{N} kP(Y_N = k) = 0 \times P(Y = 0) + \sum_{k=1}^{N} kP(Y_N = k)\\ &= \sum_{k=1}^{N} k(1-q)q^{k-1} = (1-q)\sum_{k=1}^{N} kq^{k-1}\end{aligned}$$

On sait que, pour $x \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} x^k = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$.

En dérivant par rapport à x, on obtient, pour $x \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^{N} kx^{k-1} = \frac{Nx^{N+1} - (N+1)x^N + 1}{(1-x)^2}.$$

Comme $q \neq 1$, on a :

$$E(Y_N) = (1-q) \times \frac{Nq^{N+1} - (N+1)q^N + 1}{(1-q)^2} = \frac{Nq^{N+1} - (N+1)q^N + 1}{1-q}.$$

3. Comme $|q| < 1$, on a $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} q^N = 0$ et d'après les croissances comparées, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} Nq^{N+1} = \lim_{N\to+\infty} (N+1)q^N = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} E(Y_N) = \frac{1}{1-q}$.

D'après la formule de transfert :

$$E(Y_N^2) = (1-q)\sum_{k=1}^{N} k^2 q^{k-1} = (1-q)\left(q\sum_{k=1}^{N} k(k-1)q^{k-2} + \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1}\right).$$

Donc, comme $|q| < 1$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} E(Y_N^2) = (1-q)\left(\frac{2q}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2}\right) = \frac{q+1}{(1-q)^2}$.

Et donc, d'après la formule de Kœnig-Huygens, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} V(Y_N) = \frac{q+1}{(1-q)^2} - \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)^2}$.

Correction de l'exercice 4 :

1. — $[X=2] = \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$ donc $p_2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ (car les lancers sont indépendants)

   — $[X=3] = F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}$ donc $p_3 = \frac{4}{27}$

   — $[X=4] = (F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3} \cap \overline{F_4}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3} \cap \overline{F_4})$ donc, comme on a une union d'événements incompatibles et que les lancers sont indépendants, $p_4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$

   — $[X=5] = (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \overline{F_4} \cap \overline{F_5}) \cup (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap \overline{F_4} \cap \overline{F_5}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3 \cap \overline{F_4} \cap \overline{F_5})$ donc $p_5 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{243}$

2. $(F_1, \overline{F_1})$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a

$$p_n = P(X=n) = P(F_1)P_{F_1}(X=n) + P(\overline{F_1})P_{\overline{F_1}}(X=n)$$

Or, sachant que F_1 est réalisé, obtenir $[X=n]$ revient à obtenir deux piles consécutifs au $(n-1)^{\text{ème}}$ lancer (l'obtention de face au premier lancer n'influence pas la suite) donc $P_{F_1}(X=n) = P(X=n-1) = p_{n-1}$.

De plus, pour $n \geqslant 4$, sachant que $\overline{F_1}$ est réalisé, on doit nécessairement obtenir F_2 et ensuite cela revient à obtenir deux piles consécutifs au $(n-2)^{\text{ème}}$ lancer.

Donc

$$P_{\overline{F_1}}(X=n) = P_{\overline{F_1}}(F_2 \cap [X=n]) = P_{\overline{F_1}}(F_2) \times P_{\overline{F_1} \cap F_2}(X=n) = \frac{1}{3}P(X=n-2) = \frac{1}{3}p_{n-2}.$$

On a donc bien, pour $n \geqslant 4$, $p_n = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{9}p_{n-2}$.

Cette relation est aussi vérifiée pour $n = 3$.

3. (p_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 telle que $p_1 = 0$ et $p_2 = \frac{4}{9}$.

Équation caractéristique : $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0$ de solutions $x_1 = \frac{2}{3}$ et $x_2 = -\frac{1}{3}$.

On a donc $p_n = A\left(\frac{2}{3}\right)^n + B\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ et on calcule A et B grâce à p_1 et p_2.

En conclusion on a $p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

4. n sait que X admet une espérance si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} nP(X=n)$ est absolument convergente et dans ce cas $E(X) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} nP(X=n)$.

Comme pour tout $n \in X(\Omega)$, $nP(X=n) \geqslant 0$, étudier la convergence ou la convergence absolue revient au même.
Sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=2}^{+\infty} nP(X=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} np_n = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n \qquad \text{car } p_1 = 0 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3}n\left(-\frac{1}{3}\right)^n \right) \\ &= \frac{4}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{4}{9}\sum_{n=1}^{N} n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

On reconnait des sommes de deux séries dérivées premières de la série géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$ et ces séries sont convergentes car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ et $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$.
X admet donc une espérance et on a :

$$E(X) = \frac{4}{9}\frac{1}{(1-2/3)^2} - \frac{4}{9}\frac{1}{(1+1/3)^2} = \frac{15}{4}.$$

Correction de l'exercice 5 :

1. a) Chaque jetons a la probabilité $\frac{1}{N}$ d'être choisi et ce pour chaque tirage car les tirages se font avec remise.

   On a donc $X_k(\Omega) = [\![1;N]\!]$ et $\forall i \in X_k(\Omega)$, $P(X_k = i) = \frac{1}{N}$.

   On reconnait une loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$.

   b) La probabilité de choisir un jeton dont le numéro est inférieur ou égal à i est $\frac{i}{N}$ car dans la boite il y a i jetons qui ont un numéro inférieur ou égal à i parmi les N jetons au total.

   Donc $P(X_k \leqslant i) = \frac{i}{N}$.

2. a) $Y(\Omega) = [\![1;N]\!]$.

   b) Soit $i \in Y(\Omega)$. L'événement $[Y \leqslant i]$ signifie que la liste des n numéros obtenus ne contient que des numéros inférieurs à i.
   On peut donc écrire $[Y \leqslant i] = [X_1 \leqslant i] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant i]$.
   Comme les tirages se font avec remise, les tirages sont indépendants. On a donc :

$$P(Y \leqslant i) = P(X_1 \leqslant i) \times \ldots \times P(X_n \leqslant i) = \frac{i^n}{N^n}.$$

   c) Y ne prend que des valeurs entières donc $[Y \leqslant i] = [Y \leqslant i-1] \cup [Y = i]$ et de plus les événements $[Y \leqslant i-1]$ et $[Y = i]$ sont incompatibles, on a donc :

$$P(Y \leqslant i) = P(Y \leqslant i-1) + P(Y = i).$$

   d) Pour tout $i \in [\![2;N]\!]$, on a :

$$P(Y = i) = P(Y \leqslant i) - P(Y \leqslant i-1) = \frac{i^n}{N^n} - \frac{(i-1)^n}{N^n} = \frac{i^n - (i-1)^n}{N^n}.$$

   Et de plus, l'événement $[Y = 1]$ signifie que l'on a obtenu n fois le jeton 1 donc $P(Y=1) = \frac{1}{N^n}$.
   On peut alors remarquer que la formule de $P(Y = i)$ marche encore pour $i = 1$ donc on peut résumer la loi de Y :

$$Y(\Omega) = [\![1;N]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1;N]\!],\ P(Y = i) = \frac{i^n - (i-1)^n}{N^n}.$$

3.
```
def MinMax(N,n):
    """simule une expérience de n tirages avec remise dans
    un urne contenant N jetons numérotés de 1 à N et
    renvoie le plus petit et le plus grand numéro obtenu"""
    Y=0
    Z=N+1
    for k in range(n):
        a=randint(1,N)
        if a>Y:
            Y=a
        if a<Z:
            Z=a
    return Z,Y
```

4.
```
def esperance(N,n):
    """calcule une valeur approchée de l'espérance
    des variables min et max"""
    E1,E2=0,0
    for i in range(10000):
        z,y=MinMax(N,n)
        E1+=z
        E2+=y
    return E1/10000,E2/10000
```

Correction de l'exercice 6 :

1. D'après le théorème de transfert, l'espérance de Y existe si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 1} n\mathrm{e}^{n+4}P(X=n)$ est absolument convergente et en cas de convergence $E(Y)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathrm{e}^{n+4}P(X=n)$. Or, pour tout $n\geqslant 1$, $n\mathrm{e}^{n+4}P(X=n)\geqslant 0$ donc étudier la convergence ou la convergence absolue revient au même.
   Ainsi, sous réserve de convergence :
$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathrm{e}^{n+4}P(X=n)=\sum_{n=0}^{+\infty} n\mathrm{e}^{n+4}\times p\times(1-p)^{n-1}\\&=p\mathrm{e}^5\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\mathrm{e}(1-p)\right)^{n-1}\end{aligned}$$
   On reconnait une série dérivée de la série géométrique de raison $\mathrm{e}(1-p)$.
   Or $0\leqslant 1-p\leqslant \dfrac{1}{3}$ donc $|\mathrm{e}(1-p)|<1$. Cette série est donc bien convergente
   Ainsi Y admet une espérance et $E(Y)=\dfrac{p\mathrm{e}^5}{(1-(1-p)\mathrm{e})^2}$.
2. On sait que $A=\bigcup_{n=1}^{+\infty}[X=4n]$. Donc, comme on a une union d'événements incompatibles 2 à 2 :
$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X=4n)=\sum_{n=1}^{+\infty}p(1-p)^{4n-1}\\&=\frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\left((1-p)^4\right)^n\\&=\frac{p}{1-p}\times\frac{(1-p)^4}{1-(1-p)^4}\qquad\text{car } \left|(1-p)^4\right|<1\\&=\frac{p(1-p)^3}{1-(1-p)^4}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7 :

1. Il ne peut pas rester plus d'erreurs après la première lecture qu'avant.
   Donc, si $j>k$, $P_{[Y_0=k]}(Y_1=j)=0$.
   Lorsque $j\leqslant k$, l'événement $[Y_1=j]$ sachant que $[Y_0=k]$, signifie que lors de la première lecture on ne détecte pas j erreurs parmi les k présentes dans la page 15. On est dans le cadre d'une loi binomiale de paramètres k et $\dfrac{2}{3}$ car on compte le nombre d'erreurs que l'on ne détecte pas parmi les k erreurs, sachant que la probabilité de ne pas détecter une erreur est de $\dfrac{2}{3}$ et que les détections sont indépendantes les unes des autres.
   On a donc $P_{[Y_0=k]}(Y_1=j)=\dbinom{k}{j}\left(\dfrac{2}{3}\right)^j\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-j}$.
   En résumé, pour tout $(j,k)\in\mathbb{N}^2$,
$$P_{[Y_0=k]}(Y_1=j)=\begin{cases}0 & \text{si } j>k\\ \dbinom{k}{j}\left(\dfrac{2}{3}\right)^j\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-j} & \text{si } 0\leqslant j\leqslant k.\end{cases}$$
2. D'après une propriété du cours, la famille $([Y_0=k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $j\in\mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}P(Y_1=j)&=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y_0=k)P_{[Y_0=k]}(Y_1=j)\\&=\sum_{k=0}^{j-1}P(Y_0=k)P_{[Y_0=k]}(Y_1=j)+\sum_{k=j}^{+\infty}P(Y_0=k)P_{[Y_0=k]}(Y_1=j)\\&=0+\sum_{k=j}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\binom{k}{j}\left(\frac{2}{3}\right)^j\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}\\&=\mathrm{e}^{-\lambda}2^j\sum_{k=j}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{k!}{(k-j)!j!}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^k\\&=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}2^j}{j!}\sum_{k=j}^{+\infty}\frac{1}{(k-j)!}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^k\\&=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}2^j}{j!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{i+j}\\&=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}2^j}{j!}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^j\mathrm{e}^{\lambda/3}=\frac{1}{j!}\left(\frac{2\lambda}{3}\right)^j\mathrm{e}^{-2\lambda/3}\end{aligned}$$
   Y_1 suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{2\lambda}{3}$.
   On peut démontrer, par récurrence que Y_i suit la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{2^i\lambda}{3^i}$.

Correction de l'exercice 8 :

1. $Y = Y_1 + Y_2$.
2. a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $[Y = n] = \bigcup_{k=0}^{n} [Y_1 = k] \cap [Y_2 = n-k]$.

   Comme on a ici une union d'événements disjoints deux à deux, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
P(Y = n) &= \sum_{k=0}^{n} P([Y_1 = k] \cap [Y_2 = n-k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(Y_1 = k) \times P(Y_2 = n-k) \qquad \text{par indépendance} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \times \mathrm{e}^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n
\end{aligned}$$

   Donc Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

3. On cherche ici à calculer $P_{[Y=n]}(Y_1 = k)$.
   Il est évident que si $k > n$, $P_{[Y=n]}(Y_1 = k) = 0$.
   Si $k \in [\![0; n]\!]$:

$$\begin{aligned}
P_{[Y=n]}(Y_1 = k) &= \frac{P([Y = n] \cap [Y_1 = k])}{P(Y = n)} \\
&= \frac{P([Y_2 = n-k] \cap [Y_1 = k])}{P(Y = n)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \times \mathrm{e}^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n} = \binom{n}{k} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 9 :

1. Comme X est à valeurs entières, on a

$$[X \geqslant n] = [X = n] \cup [X \geqslant n+1].$$

   Les événements $[X = n]$ et $[X \geqslant n+1]$ sont incompatibles, on a donc

$$P(X \geqslant n) = P(X = n) + P(X \geqslant n+1). \qquad (\star)$$

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P(X = n+1) &= \alpha P(X \geqslant n+1) && \text{hypothèse de l'énoncé} \\
&= \alpha P(X \geqslant n) - \alpha P(X = n) && \text{d'après } (\star) \\
&= (1-\alpha) P(X = n) && \text{car } \alpha P(X \geqslant n) = P(X = n).
\end{aligned}$$

   La suite $(P(X = n))_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $1 - \alpha$.

2. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = (1-\alpha)^n P(X = 0)$.
   Deux méthodes pour trouver $P(X = 0)$:
   - Méthode 1 :
     On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$, donc cela impose (*calcul laissé au lecteur*) $P(X = 0) = \alpha$.
   - Méthode 2 :
     D'après l'énoncé, $P(X = 0) = \alpha P(X \geqslant 0) = \alpha \times 1$ car $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

   On a donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = \alpha(1-\alpha)^n$.

3. On remarque que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Y = k) = P(X = k-1) = \alpha(1-\alpha)^{k-1}.$$

   Y suit donc la loi géométrique de paramètre α.

4. D'après la question précédente et notre cours, Y admet une espérance et une variance et

$$E(Y) = \frac{1}{\alpha} \qquad V(Y) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}.$$

   Comme $X = Y - 1$, on en déduit, par linéarité de l'espérance et propriété de la variance, que X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = E(Y-1) = \frac{1-\alpha}{\alpha} \qquad V(X) = V(Y) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}.$$

Correction de l'exercice 10 :

X est une VAR finie donc X admet une variance.
On a tout d'abord

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \times \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Donc $V(X) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4} = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Correction de l'exercice 11 : Oral Agro-véto

1. a) Comme X est une variable aléatoire à valeurs entières, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$[X > k-1] = [X = k] \cup [X > k].$$

$[X = k]$ et $[X > k]$ étant disjoints, on a donc
$P(X > k-1) = P(X = k) + P(X > k)$
et ainsi $P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$.
On en déduit alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) &= 0 \times P(X=0) + \sum_{k=1}^{n} k\left(P(X>k-1) - P(X>k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X>k-1) - \sum_{k=1}^{n} kP(X>k) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)P(X>i) - \sum_{k=1}^{n} kP(X>k) \qquad i = k-1 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} P(X>i) + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} iP(X>i) - \sum_{k=1}^{n} kP(X>k)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} P(X>i) + 0P(X>0) - nP(X>n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n).
\end{aligned}$$

b) On sait que X admet une espérance donc $\sum kP(X=k)$ est absolument convergente. On sait donc que $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie qui est $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k)$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k) - \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = E(X) - \sum_{k=0}^{n} kP(X=k).$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k) = E(X) - E(X) = 0$.

c) On sait que $P(X > n) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k)$. Or, pour tout $k \geqslant n+1$ on a

$$\begin{aligned}
& 0 \leqslant n < k \\
\Rightarrow & 0 \leqslant nP(X=k) \leqslant kP(X=k) \qquad \text{car } P(X=k) \geqslant 0 \\
\Rightarrow & 0 \leqslant n \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k)
\end{aligned}$$

somme infinie autorisée car toutes les séries sont cvgtes

$$\Rightarrow 0 \leqslant nP(X>n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k)$$

D'après la question précédente et le théorème d'encadrement de limites on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nP(X>n) = 0$.

d) Dans l'égalité de la question 1.a), $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $E(X)$ (définition de l'espérance) et $(nP(X>n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 (question précédente).
Donc $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X>k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie et en passant à la limite dans l'égalité de la question 1.a) on obtient :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k).$$

2. a)
```python
from random import randint

def simuler(N,n):
    L=[randint(1,N) for _ in range(n)]
    return max(L)
```

b) On a ici $M(\Omega) = [\![1;N]\!] \subset \mathbb{N}$ et comme M est une VAR finie, elle admet une espérance. Nous pouvons donc appliquer le résultat de la question 1. et écrire $E(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(M>k)$.

De plus, en notant pour $i \in [\![1;n]\!]$, X_i la VAR égale au numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P(M > k) &= 1 - P(M \leqslant k) \\
&= 1 - P\left([X_1 \leqslant k] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant k]\right) && \text{raisonnement logique} \\
&= 1 - P(X_1 \leqslant k) \times \ldots \times P(X_n \leqslant k) && \text{tirages indépendants} \\
&= \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{k}{N}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant N \\ 0 & \text{si } k > N. \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
E(M) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(M > k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n\right) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} 0 \\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

Il n'est pas utile de chercher à transformer plus cette expression.

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{E(M)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \left(1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right),$$

avec $f : x \mapsto 1 - x^n$.
f étant continue sur $[0;1]$ d'après le théorème des sommes de Riemann,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{E(M)}{N} = \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit alors que $\dfrac{E(M)}{N} \sim \dfrac{1}{n+1}$ et donc $E(M) \sim \dfrac{N}{n+1}$.

Correction de l'exercice 12 : Oral G2E

1. a) Si l'urne ne contient pas de boule rouge, le jeu se termine au premier tirage et l'événement G_0 correspond au fait d'obtenir une boule blanche au premier tirage donc $P(G_0) = \dfrac{b}{b+n}$.

Si l'urne contient une boule rouge au départ il y a deux possibilités pour gagner : $G_1 = B_1 \cup (R_1 \cap B_2)$.
On a une union d'événement incompatibles donc :

$$P(G_1) = P(B_1) + P(R_1)P_{R_1}(B_2) = \frac{b}{b+n+1} + \frac{1}{b+n+1} \times \frac{b}{b+n} = \frac{b}{b+n}.$$

b) Appliquons la formule des probabilités totales avec le SCE $(R_1, \overline{R_1})$. On a :

$$\begin{aligned}
P(G_r) &= P(R_1 \cap G_r) + P(\overline{R_1} \cap G_r) \\
&= P(R_1)P_{R_1}(G_r) + P(B_1)
\end{aligned}$$

On peut alors remarquer que $P_{R_1}(G_r) = P(G_{r-1})$ car si on sait qu'on a eu une rouge au premier tirage, on peut considérer que l'on recommence l'expérience (le deuxième tirage devient le point de départ) avec $r-1$ boules rouges dans l'urne.
On a donc $P(G_r) = \dfrac{r}{b+n+r} P(G_{r-1}) + \dfrac{b}{b+n+r}$.

c) On peut alors montrer par une récurrence rapide que $P(G_r) = \dfrac{b}{b+n}$. (*Je vous laisse le faire !*)

2. On a $X(\Omega) = \{1;2;3\}$ et

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= P(B_1 \cup N_1) = \frac{b+n}{b+n+2} \\
P(X=2) &= P(R_1 \cap \overline{R_2}) = \frac{2}{b+n+2} \times \frac{b+n}{b+n+1} \\
P(X=3) &= P(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{(b+n+2)(b+n+1)}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 13 :

1.
```
from random import random,randint

def uniforme(n):
    '''simule la réalisation d'une variable suivant une loi
    uniforme sur [[1;n]]'''
    return randint(1,n)
```

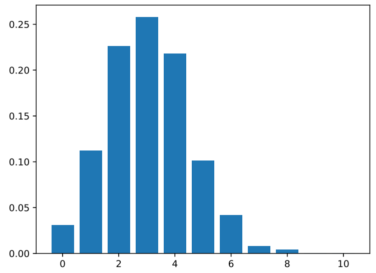
2.
```
from random import random,randint
import matplotlib.pyplot as mp

def binomiale(n,p):
    '''simule la réalisation d'une variable suivant une loi
```

```
    binomiale de paramètres n et p'''
    X=0
    for _ in range(n):
        if random()<p:# test si l'expérience a été un succès
            X+=1 # a chaque succès le compteur augmente de 1
    return X

abscisses=[i for i in range(11)]
proba=[0]*11
for _ in range(1000):
    k=binomiale(10,0.3)
    proba[k]+=1/1000

mp.bar(abscisses,proba)
mp.show()
```



3.
```
from random import random,randint
import matplotlib.pyplot as mp

def geometrique(p):
    X=1
    while random()>p:
        X+=1
    return X

L_geom=[geometrique(0.2) for k in range(1000)]

N=max(L_geom) # récupère la plus grande valeur prise par X
abscisses=[i for i in range(1,N+1)]
proba=[0]*N
for a in L_geom:
    proba[a-1]+=1/1000

mp.bar(abscisses,proba)
mp.show()
```