Banque Agro-véto 2016 Maths
Correction

Exercice :

Problème :

Partie I : Définitions, premières propriétés

1. (a) D'une part $\underbrace{AB_1A}B_2 = AB_2$.

   D'autre part $\underbrace{AB_1}\,\underbrace{AB_2} = B_1\underbrace{AB_2A} = B_1A = AB_1$.

   Donc $AB_1 = AB_2$.

   (b) On a $B_1 = B_1AB_1 = B_1AB_2 = AB_1B_2 = AB_2B_2 = B_2AB_2 = B_2$.

   Donc la pseudo-inverse d'une matrice, si elle existe, est unique.

2. (a) En posant $A = 0$ et $B = 0$ toutes les égalités de (1) sont vérifiées.

   Donc la matrice nulle est pseudo-inversible et sa pseudo-inverse est $0^* = 0$.

   (b) On a $MM^{-1} = M^{-1}M$, $MM^{-1}M = M$ et $M^{-1}MM^{-1} = M^{-1}$.

   Donc M est pseudo-inversible et $M^* = M^{-1}$.

   (c) i. Pour $k \geqslant 2$:
   $$N^*N^k = N^*N \times N^{k-1} = NN^*N \times N^{k-2} = N \times N^{k-2} = N^{k-1}.$$

   ii. Raisonnons par l'absurde et supposons que $p \geqslant 2$. Alors, d'après la question précédente :
   $$N^*N^p = N^{p-1}.$$
   Comme $N^p = 0$, on obtient $N^{p-1} = 0$, ce qui est absurde.

   Donc $p = 1$ et ainsi $N = 0$.

   iii. Dans cet exemple, $N^2 = 0$ donc N est nilpotente mais non nulle donc N n'est pas pseudo-inversible.

3. (a) Soit D une matrice diagonale. Notons $d_1, \ldots, d_n$ les éléments de la diagonale de D.

   On pose alors D^* la matrice diagonale dont l'élément situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $i^{\text{ème}}$ colonne est $\dfrac{1}{d_i}$ si d_i n'est pas nul et 0 sinon.

   On a alors $DD^* = D^*D$, $DD^*D = D$ et $D^*DD^* = D^*$ donc D est pseudo-inversible et D^* définie ci-dessus est sa pseudo-inverse.

   (b) On a :
   $$A'PA^*P^{-1} = PAP^{-1}PA^*P^{-1} = PAA^*P^{-1} = PA^*AP^{-1} = PA^*P^{-1}A'$$
   $$A'PA^*P^{-1}A' = PAA^*AP^{-1} = PAP^{-1} = A'$$
   $$PA^*P^{-1}A'PA^*P^{-1} = PA^*AA^*P^{-1} = PA^*P^{-1}$$
   Donc A' est pseudo-inversible et $(A')^* = PA^*P^{-1}$.

   (c) Si A est diagonalisable alors il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

   Comme D est diagonale elle est pseudo-inversible.

   Donc de même que dans la question précédente, A est pseudo-inversible et $A^* = PD^*P^{-1}$.

   (d) i. On cherche les réels λ tels que $\text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$.
   $$\begin{aligned}
   \text{rg}(A-\lambda I_3) &= \text{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
   &= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\
   &= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & 4-\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda^2+5\lambda-4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_1 \end{array} \\
   &= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2-6\lambda+8 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_2 - L_3
   \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc les solutions de

$$\lambda = 0 \text{ ou } \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

Donc $\mathrm{sp}(A) = \{0; 2; 4\}$.

$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ donc $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ donc $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$AX = 4X \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ donc $E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

ii. A admet trois valeurs propres distinctes et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable.

iii. D'après la question 3. (c), A est donc pseudo-inversible.

iv. D'après les calculs fait à la question 3.(d)i. on a $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

car $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de vecteurs propres de A dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc $A^* = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} P^{-1}$.

Pour calculer explicitement A^* il nous manque P^{-1}.

Après calculs, on trouve $P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Puis, on obtient $A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

Partie II : Une caractérisation des matrices pseudo-inversibles

1. (a) $a^* \circ a \circ a = a \circ a^* \circ a = a$ et $a \circ a \circ a^* = a \circ a^* \circ a = a$.

(b) Soit $x \in \ker(a) \cap \mathrm{Im}(a)$. On a alors $a(x) = 0$ et il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = a(y)$.
D'après la question précédente, $a^*(a(a(y))) = a(y)$.
De plus $a^*(a(a(y))) = a^*(a(x)) = a^*(0) = 0$ car a^* est une application linéaire.
Donc $a(y) = 0$ et donc $x = 0$.
Ainsi $\ker(a) \cap \mathrm{Im}(a) \subset \{0\}$ et il est évident que $0 \in \ker(a) \cap \mathrm{Im}(a)$ donc $\ker(a) \cap \mathrm{Im}(a) = \{0\}$.

(c) Unicité : supposons que z se décompose de deux façons :

$$z = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$

On a alors $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$. De plus $x_1 - x_2 \in \ker(a)$ et $y_2 - y_1 \in \mathrm{Im}(a)$.
Comme on a vu que $\ker(a) \cap \mathrm{Im}(a) = \{0\}$ on a donc $x_1 - x_2 = 0 = y_2 - y_1$.
Ainsi $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.
On a donc l'unicité de la décomposition si elle existe.
Existence :

Soit $z \in \mathbb{R}^n$. On pose $y = a^* \circ a(z)$ et $x = z - a^* \circ a(z)$.

On a bien $y + x = z$ et $y \in \text{Im}(a)$ car on a aussi $y = a \circ a^*(z)$.

De plus $a(x) = a(z) - a \circ a^* \circ a(z) = a(z) - a(z) = 0$. Donc $x \in \ker(a)$.

On a donc bien trouvé $x \in \ker(a)$ et $y \in \text{Im}(a)$ tels que $z = x + y$.

Pour trouver comment poser y il faut travailler sur son brouillon en commençant par remarquer que si $z = x + y$ alors $a(z) = a(y)$ et comme $y = a(y')$, on a $a(z) = a \circ a(y')$ puis avoir l'idée de composer par a^* pour trouver $a^* \circ a(z) = a^* \circ a \circ a(y') = a(y') = y$.

2. (a) Comme a est linéaire, a_0 est aussi linéaire.

   De plus a_0 va de $\text{Im}(a)$ dans $\text{Im}(a)$ donc a_0 est un endomorphisme de $\text{Im}(a)$.

   Il reste à montrer que a_0 est bijectif. Comme nous avons le même espace de départ et d'arrivé et que cet espace est de dimension finie, il suffit de montrer que a_0 est injectif.

   Or $\ker(a_0) = \{x \in \text{Im}(a)/a_0(x) = 0\} = \{x \in \text{Im}(a)/a(x) = 0\} = \ker(a) \cap \text{Im}(a)$.

   Donc $\ker(a_0) = \{0\}$ et a_0 est injective.

   En conclusion, a_0 est un automorphisme de $\text{Im}(a)$.

   (b) i. D'après le théorème du rang, comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, $\dim(\ker(a)) + \dim(\text{Im}(a)) = \dim(\mathbb{R}^n)$.

   Donc $s + r = n$.

   ii. Notons $\mathscr{B}' = (e_1, \ldots, e_s, f_1, \ldots, f_r)$.

   D'après la question précédente, $\text{card}(\mathscr{B}') = n = \dim(\mathbb{R}^n)$.

   Montrons que la famille $\mathscr{B}'$ est libre. On cherche tous les réels $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ tels que :

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_s e_s + \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_r f_r = 0$$

   En appliquant a à cette relation, on obtient :

$$\beta_1 a(f_1) + \ldots + \beta_r a(f_r) = 0.$$

   Comme a_0 est un automorphisme de $\text{Im}(a)$ et que $(f_1, \ldots, f_r)$ est une base de $\text{Im}(a)$, la famille $(a(f_1), \ldots, a(f_r))$ est une base de $\text{Im}(a)$ (a_0 transforme une base en une base) donc cette famille est libre.

   On en déduit donc que $\beta_1 = \ldots = \beta_r = 0$.

   En réinjectant dans la relation de départ, on a $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_s e_s = 0$ et comme la famille $(a_1, \ldots, e_s)$ est libre, on a donc $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = 0$.

   Pour finir la famille $\mathscr{B}'$ est libre.

   En conclusion, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

   iii. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe des réels $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ (uniques) tels que :

$$x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_s e_s + \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_r f_r.$$

   En posant $x_1 = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_s e_s$ et $x_2 = \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_r f_r$, on a bien $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \ker(a)$ et $x_2 \in \text{Im}(a)$.

   L'unicité de la décomposition peut se démontrer de la même façon que dans la question 1.(c).

   (c) On a bien tout d'abord, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $b(x) \in \mathbb{R}^n$.

   De plus, soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ les décompositions de x et y sur $\ker(a)$ et $\text{Im}(a)$.

   On a alors $x + \lambda y = \underbrace{x_1 + \lambda y_1}_{\in \ker(a)} + \underbrace{x_2 + \lambda y_2}_{\in \text{Im}(a)}$.

   Donc $b(x + \lambda y) = a_0^{-1}(x_2 + \lambda y_2) = a_0^{-1}(x_2) + \lambda a_0^{-1}(y_2)$, car a_0^{-1} est linéaire.

   Donc $b(x + \lambda y) = b(x) + \lambda b(y)$.

   b est donc linéaire et ainsi b est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

(d) Pour tout $x \in R^n$ $(x = x_1 + x_2)$:

$$a(b(x)) = a(\underbrace{a_0^{-1}(x_2)}_{\in \mathrm{Im}(a)}) = a_0(a_0^{-1}(x_2)) = x_2$$

$$b(\underbrace{a(x)}_{\in \mathrm{Im}(a)}) = a_0^{-1}(a(x)) = a_0^{-1}(a(x_1) + a(x_2)) = a_0^{-1}(a(x_2)) = a_0^{-1}(a_0(x_2)) = x_2$$

Donc $a \circ b = b \circ a$.

De plus, en réutilisant les calculs ci-dessus :

$$a \circ b \circ a(x) = a(x_2) = a(x_1) + a(x_2) = a(x)$$

Donc $a \circ b \circ a = a$.

Et enfin,

$$b \circ a \circ b(x) = b(x_2) = a_0^{-1}(x_2) = b(x)$$

Donc $b \circ a \circ b = b$.

(e) Notons $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b)$. D'après la question précédente :

$$\begin{cases} AB = BA \\ ABA = A \\ BAB = B \end{cases}$$

Donc A est pseudo-inversible et $A^* = B$.

3. Idée : utiliser ce qu'on a démontré dans cette partie c'est à dire :

$$A \text{ est pseudo-inversible } \Leftrightarrow \ker(a) \cap \mathrm{Im}(a) = \{0\}.$$

$\Longrightarrow$:

Supposons que A est pseudo-inversible. Alors on a $\ker(a) \cap \mathrm{Im}(a) = \{0\}$.

D'après la question 2. si on note $(e_1, \ldots, e_s)$ une base de $\ker(a)$ et $(f_1, \ldots, f_r)$ une base de $\mathrm{Im}(a)$, alors $\mathscr{B}' = (f_1, \ldots, f_r, e_1, \ldots, e_s)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

On a alors $a(f_i) \in \mathrm{Im}(a)$ donc $a(f_i)$ s'exprime comme combinaison linéaire des $(f_1, \ldots, f_r)$ uniquement et $a(e_j) = 0$ donc la matrice de a dans la base $\mathscr{B}'$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A_0 est en fait la matrice de l'application a_0 dans la base $(f_1, \ldots, f_r)$ et elle est inversible car a_0 est bijectif.

Comme A est la matrice de a dans la base canonique, A est bien semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

où A_0 est une matrice carrée inversible de taille $\mathrm{rg}(A)$. $\Longleftarrow$:

Supposons que A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

où A_0 est une matrice carrée inversible de taille $\mathrm{rg}(A)$.
Cela signifie qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(a) = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $\mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_r, e_1, \dots, e_{n-r})$ avec $r = \mathrm{rg}(A)$.
D'après la forme de la matrice de la matrice de a dans la base $\mathscr{B}'$, on a $e_1, \dots, e_{n-r} \in \ker(a)$.
De plus la famille $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_{n-r})$ est une sous-famille de $\mathscr{B}'$ donc elle est libre et $\mathrm{card}(\mathscr{F}) = n - r = \dim(\ker(a))$.
Donc $\mathscr{F}$ est une base de $\ker(a)$.
Si $x \in \ker(a) \cap \mathrm{Im}(a)$ alors

— $x \in \ker(a) \Longrightarrow x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-r})$.
— $x \in \mathrm{Im}(a) \Longrightarrow x \in \mathrm{Vect}(a(f_1), \dots, a(f_r), a(e_1), \dots, a(e_{n-r})) \subset \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_r)$, car d'après la forme de la matrice de a dans la base $\mathscr{B}'$, $a(f_i)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(f_1, \dots, f_r)$ et $a(e_i) = 0$.

Donc $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-r}) \cap \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_r) = \{0\}$ car la famille $\mathscr{B}'$ est libre.
Donc $\ker(a) \cap \mathrm{Im}(a) = \{0\}$ et ainsi A est pseudo-inversible.