

Couples de VAR discrètes ou finies
Table des matières

I	Généralités sur les couples de VAR discrètes	2
1	Loi d'un couple	2
2	Lois marginales	4
3	Loi conditionnelle	5
4	Bilan : lien entre loi conjointe, lois marginales et loi conditionnelle	6
II	Fonction de deux VAR discrètes ou finies	7
1	Calcul de probabilité	7
2	Espérance de $u(X, Y)$	8
3	Somme de VAR discrètes	10
a	Loi	10
b	Somme de lois de Bernoulli	12
c	Somme de lois de Poisson	12
4	Covariance	13
a	Définition	13
b	Lien entre covariance et variance	14

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ désigne un espace probabilisé et X et Y désignent deux VAR discrètes ou finies définies sur Ω .

I Généralités sur les couples de VAR discrètes

1 Loi d'un couple

Définition 1

On appelle **couple de VAR**, et on note (X, Y) , l'application définie par :

$$\begin{aligned} (X, Y) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\mapsto (X(\omega), Y(\omega)). \end{aligned}$$

Définition 2

On appelle **loi du couple (X, Y)** , ou encore **loi conjointe des variables aléatoires X et Y** , la fonction $f_{X,Y}$ définie par :

$$\begin{aligned} f_{X,Y} : X(\Omega) \times Y(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto P([X = x] \cap [Y = y]). \end{aligned}$$

Remarque :

L'événement $[X = x] \cap [Y = y]$ est également noté $(X = x, Y = y)$.

Conseils méthodologiques :

- Déterminer la loi du couple (X, Y) signifie qu'il faut expliciter $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ puis calculer toutes les valeurs de $P([X = x] \cap [Y = y])$ où $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.
- Lorsque cela sera possible (lorsque X et Y prennent un petit nombre de valeurs), on présentera la loi de (X, Y) sous forme d'un tableau à double entrée :

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_n
x_1	$P([X = x_1] \cap [Y = y_1])$	$P([X = x_1] \cap [Y = y_2])$	$\dots$	$P([X = x_1] \cap [Y = y_n])$
x_2	$\vdots$			$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
x_p	$P([X = x_p] \cap [Y = y_1])$	$\dots$	$\dots$	$P([X = x_p] \cap [Y = y_n])$

Exemple 1 :

On effectue une succession de lancers d'une pièce pour laquelle la probabilité de faire pile est égale à $p \in]0; 1[$. On note X le numéro du lancer pour lequel on a obtenu pile pour la première fois et Y le numéro du lancer pour lequel on a obtenu pile pour la deuxième fois. Les lancers sont supposés indépendants.

Déterminons la loi du couple (X, Y) .

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

On doit maintenant calculer $P([X = i] \cap [Y = j])$ pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

On peut commencer par remarquer que si $i \geq j$, $P([X = i] \cap [Y = j]) = 0$ car on ne peut pas obtenir le deuxième pile avant le premier !

Supposons maintenant que $j > i$.

Si on note F_k l'événement « obtenir face au $k^{\text{ème}}$ lancer », on a :

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = P(F_1 \cap \dots \cap F_{i-1} \cap \overline{F_i} \cap F_{i+1} \cap \dots \cap F_{j-1} \cap \overline{F_j}).$$

Les lancers étant indépendants, on a donc :

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = p^2(1-p)^{j-2}.$$

Pour résumer $P([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ p^2(1-p)^{j-2} & \text{si } i < j \end{cases}$.

Propriété 1

La famille d'événements $([X = x] \cap [Y = y])_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ forme un système complet d'événements.

Remarque :

Cette propriété peut permettre de vérifier la cohérence de notre loi conjointe ou permettra dans certains exercices de déterminer la valeur d'un paramètre au départ inconnu dans la donnée de $P([X = x] \cap [Y = y])$ en vérifiant que $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y]) = 1$. Les séries doubles n'étant pas au programme, vous ne pourrez utiliser ce résultat que dans le cas de VAR finies.

Exemple 2 :

Soit X et Y deux VAR à valeurs dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ dont la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} \alpha \frac{i}{j} & \text{si } 1 \leq i \leq j \\ 0 & \text{si } j < i \leq n. \end{cases}$$

Déterminons la valeur du réel α .

On peut commencer par remarquer que pour que $\alpha \frac{i}{j}$ soit une probabilité il faut déjà que α soit un réel positif.

De plus, comme $([X = i] \cap [Y = j])_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2}$ doit être un système complet d'événement, il est nécessaire d'avoir $\sum_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2} P([X = i] \cap [Y = j]) = 1$. Calculons cette somme double. Il y a deux manières de démarrer le calcul :

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2} P([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P([X = i] \cap [Y = j]).$$

N'ayant aucune connaissance sur une somme du type $\sum \frac{1}{j}$, il est plus astucieux de commencer par sommer sur i .

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2} P([X = i] \cap [Y = j]) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P([X = i] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j \alpha \frac{i}{j} + \sum_{i=j+1}^n 0 \right) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} \\ &= \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) \\ &= \frac{\alpha}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{\alpha n(n+3)}{4}. \end{aligned}$$

Il est donc nécessaire d'avoir $\alpha = \frac{4}{n(n+3)}$.

Définition 3

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes ou finies.

La loi de X et la loi de Y sont appelées les **lois marginales du couple (X, Y)** .

Conseils méthodologiques :

Lorsque l'on connaît la loi du couple (X, Y) on peut en déduire la loi de X (resp. de Y) grâce à la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ (resp. $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$) :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y])$$

$$\left(\text{resp. } \forall y \in Y(\Omega), \quad P([Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y]) \right).$$

Exemple 3 :

Reprenons l'exemple 1 et déterminons la loi de Y .

Les événements $([X = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales on a donc :

$$\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, \quad P(Y = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P([X = i] \cap [Y = j]).$$

Attention, dans le calcul de cette somme il faut remarquer que $P([X = i] \cap [Y = j])$ prend des valeurs différentes suivant les valeurs de i .

Pour $j \geq 2$ fixé :

$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{i=1}^{j-1} p^2(1-p)^{j-2} + \sum_{i=j}^{+\infty} 0 = (j-1)p^2(1-p)^{j-2}.$$

Pour résumer : $Y(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $\forall j \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, $P(Y = j) = (j-1)p^2(1-p)^{j-2}$.

Attention, la réciproque à la remarque précédente n'est en général pas vraie : la connaissance des lois marginales ne suffit pas à déterminer la loi du couple.

Exemple 4 :

On considère deux couples de VAR finies (X, Y) et (X', Y') dont les lois sont résumées dans les tableaux suivants :

$\begin{array}{c} Y \\ \diagdown \\ X \end{array}$	0	1	Loi de X
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$\begin{array}{c} Y' \\ \diagdown \\ X' \end{array}$	0	1	Loi de X'
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
Loi de Y'	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

On voit ici que ces 4 VAR ont la même loi mais les couples n'ont pas la même loi.

Définition 4

Soit (X, Y) un couple de VAR discrètes ou finies et soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$. On appelle **loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$** la fonction définie par :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto P_{[Y=y]}(X = x). \end{aligned}$$

On définit de même pour $x \in X(\Omega)$ la **loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$** .

Conseils méthodologiques :

Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ signifie qu'il faut expliciter $X(\Omega)$, puis, pour tout $x \in X(\Omega)$, $P_{[Y=y]}(X = x)$.

Exemple 5 :

On dispose d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0; 1[$ et d'une infinité d'urnes $U_1, U_2, \dots$ telles que l'urne U_i contient i jetons numérotés de 1 à i .

On réalise l'expérience suivante :

- on lance la pièce une infinité de fois et on note le numéro du lancer pour lequel on a obtenu pile pour la première fois ;
- si i est le numéro du lancer où on a obtenu pile pour la première fois, on effectue un tirage au hasard dans l'urne U_i .

On note X la variable aléatoire égale au rang du premier pile obtenu et Y la variable aléatoire égale au numéro du jeton tiré.

Déterminons, pour tout $i \in X(\Omega)$ la loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$.

On a tout d'abord $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement $[X = i]$ est réalisé, le tirage du jeton se fait dans l'urne U_i qui contient i jetons numérotés de 1 à i .

$$\text{On a donc } \forall k \in \mathbb{N}^*, P_{[X=i]}(Y = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > i \\ \frac{1}{i} & \text{si } 1 \leq k \leq i \end{cases}.$$

On peut dire que la loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$ est la loi uniforme sur $\llbracket 1; i \rrbracket$.

Conseils méthodologiques :

Grâce, encore une fois, à la formule des probabilités totales, on peut déduire d'une loi conditionnelle, la loi d'une des variables aléatoires.

Avec le système complet d'événements $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$:

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y = y) P_{[Y=y]}(X = x).$$

Avec le système complet d'événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$:

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P([Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) P_{[X=x]}(Y = y).$$

Exemple 6 :

Reprenons l'exemple précédent et déterminons la loi de Y .

Les événements $([X = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i) P_{[X=i]}(Y = k).$$

On remarque qu'il nous faut la loi de X pour continuer. X désigne le rang d'apparition pour la première fois de l'événement « obtenir pile » dans une succession illimitée d'expériences identiques et indépendantes donc X suit la loi géométrique de paramètre p .

D'après les résultats de l'exemple précédent, on a donc :

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i)P_{[X=i]}(Y = k) + \sum_{i=k}^{+\infty} P(X = i)P_{[X=i]}(Y = k) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} 0 + \sum_{i=k}^{+\infty} (1-p)^{i-1}p \times \frac{1}{i} = \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^{i-1}p}{i}. \end{aligned}$$

Pour résumer, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^{i-1}p}{i}$. (On ne cherchera pas à simplifier plus cette somme.)

4 Bilan : lien entre loi conjointe, lois marginales et loi conditionnelle

Conseils méthodologiques :

Il est important de bien savoir jongler entre loi du couple, lois marginales et loi conditionnelle. Il s'agit uniquement d'appliquer la définition des probabilités conditionnelles ou alors d'appliquer la formule des probabilités totales mais voici tout de même un résumé de tout cela :

— Loi conditionnelle à partir de la loi du couple : définition d'une probabilité conditionnelle

$$\begin{aligned} \text{si } P(X = x) \neq 0, \quad P_{[X=x]}(Y = y) &= \frac{P([X = x] \cap [Y = y])}{P(X = x)}. \\ \text{si } P(Y = y) \neq 0, \quad P_{[Y=y]}(X = x) &= \frac{P([X = x] \cap [Y = y])}{P(Y = y)}. \end{aligned}$$

— Loi du couple à partir de la loi conditionnelle : définition d'une probabilité conditionnelle

$$\begin{aligned} P([X = x] \cap [Y = y]) &= P(X = x)P_{[X=x]}(Y = y). \\ P([X = x] \cap [Y = y]) &= P(Y = y)P_{[Y=y]}(X = x). \end{aligned}$$

— Lois marginales à partir de la loi du couple : **appliquer la formule des probabilités totales**

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y]). \\ P(Y = y) &= \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y]). \end{aligned}$$

— Lois marginales à partir des lois conditionnelles : **appliquer la formule des probabilités totales**

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y = y)P_{[Y=y]}(X = x). \\ P(Y = y) &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)P_{[X=x]}(Y = y). \end{aligned}$$

Pour l'exploitation des deux derniers points en exercice, il faudra toujours bien rédiger au moins une fois l'utilisation de la formule des probabilités totales en précisant le système complet d'événements utilisé (si le même type de raisonnement est utilisé plusieurs fois dans le problème il ne faudra pas hésiter à utiliser une rédaction du type « De même ... »).

II Fonction de deux VAR discrètes ou finies

1 Calcul de probabilité

Remarque :

Dans les exercices sur les couples de variables aléatoires on pourra voir apparaître un calcul de probabilité faisant intervenir les deux variables en même temps. Aucun résultat théorique n'est au programme sur ce sujet, mais le principe global est le suivant :

$$[u(X, Y) \in I] = \bigcup_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) / u(x,y) \in I} ([X = x] \cap [Y = y]).$$

Exemple 7 :

On reprend l'exemple 1 et on souhaite calculer $P(X + Y = 6)$, $P(Y - X = n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$ fixé) et $P(Y < 2X)$.

— Étant donné que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et étant donnée la description de l'expérience on a

$$\begin{aligned} [X + Y = 6] &= ([X = 1] \cap [Y = 5]) \cup ([X = 2] \cap [Y = 4]) \\ \text{donc } P(X + Y = 6) &= P([X = 1] \cap [Y = 5]) \cup ([X = 2] \cap [Y = 4]) \\ &= P([X = 1] \cap [Y = 5]) + P([X = 2] \cap [Y = 4]) \quad \text{union d'évts disjoints} \\ &= p^2(1-p)^3 + p^2(1-p)^2 \quad \text{loi du couple connue} \\ &= p^2(1-p)^2(2-p). \end{aligned}$$

— Étant donné que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et étant donnée la description de l'expérience on a

$$\begin{aligned} [Y - X = n] &= \bigcup_{i=1}^{+\infty} [X = i] \cap [Y = n + i] \\ \text{donc } P(Y - X = n) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} [X = i] \cap [Y = n + i]\right) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} P([X = i] \cap [Y = n + i]) \quad \text{union d'évts disjoints} \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{n+i-2} \quad \text{loi du couple connue} \\ &= p^2(1-p)^{n-2} \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^i \\ &= p^2(1-p)^{n-2} \times (1-p) \times \frac{1}{1-(1-p)} \quad \text{car } |1-p| < 1 \\ &= p(1-p)^{n-1}. \end{aligned}$$

— Étant donné que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et étant donnée la description de l'expérience on a

$$\begin{aligned}
[Y < 2X] &= \bigcup_{i=1}^{+\infty} [X = i] \cap [Y < 2i] \\
&= \bigcup_{i=2}^{+\infty} \bigcup_{j=i+1}^{2i-1} [X = i] \cap [Y = j] \\
\text{donc } P(Y < 2X) &= P\left(\bigcup_{i=2}^{+\infty} \bigcup_{j=i+1}^{2i-1} [X = i] \cap [Y = j]\right) \\
&= \sum_{i=2}^{+\infty} \sum_{j=i+1}^{2i-1} P([X = i] \cap [Y = j]) && \text{union d'évts disjoints} \\
&= \sum_{i=2}^{+\infty} \sum_{j=i+1}^{2i-1} p^2 (1-p)^{j-2} \\
&= p^2 \sum_{i=2}^{+\infty} (1-p)^{i-1} \times \frac{1 - (1-p)^{i-1}}{1 - (1-p)} && \text{car } 1-p \neq 1 \\
&= p \left(\sum_{i=2}^{+\infty} (1-p)^{i-1} - \sum_{i=2}^{+\infty} ((1-p)^2)^{i-1} \right) \\
&= p \left(\frac{1-p}{1-(1-p)} - \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} \right) && \text{car } |1-p| < 1 \\
&= 1-p - \frac{(1-p)^2}{2-p} \\
&= (1-p) \left(1 - \frac{1-p}{2-p} \right) = \frac{1-p}{2-p}.
\end{aligned}$$

2 Espérance de $u(X, Y)$

Théorème 1 : Théorème de transfert

On suppose que X et Y sont deux VAR finies.

Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables (définie au moins sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$) et $Z = u(X, Y)$. Alors Z est une variable aléatoire réelle dont l'espérance est :

$$E(Z) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} u(x, y) P([X = x] \cap [Y = y]).$$

Remarques :

- Résultat admis en BCPST.
- Avec ce théorème on peut démontrer que $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, ainsi que le fait que lorsque X et Y sont indépendantes $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Démonstration de $E(X + Y)$:

D'après le théorème de transfert :

$$E(X + Y) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} (x + y) P([X = x] \cap [Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} (x + y) P([X = x] \cap [Y = y])$$

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(x \underbrace{\sum_{y \in Y(\Omega)} P([X=x] \cap [Y=y])}_{=P(X=x)} \right) + \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(y \underbrace{\sum_{x \in X(\Omega)} P([X=x] \cap [Y=y])}_{=P(Y=y)} \right) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} (xP(X=x)) + \sum_{y \in Y(\Omega)} (yP(Y=y)) \\
&= E(X) + E(Y).
\end{aligned}$$

Démonstration de $E(XY)$:

On suppose que X et Y sont indépendantes.

D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP([X=x] \cap [Y=y]) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xyP(X=x) \times P(Y=y) && \text{grâce à l'indépendance} \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(xP(X=x) \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y=y) \right) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} (xP(X=x)E(Y)) \\
&= E(Y) \sum_{x \in X(\Omega)} (xP(X=x)) = E(X)E(Y).
\end{aligned}$$

Attention la réciproque de cette propriété est en général fausse.
Ce n'est pas parce que $E(XY) = E(X)E(Y)$ que les VAR sont indépendantes.

Exemple 8 :

On considère X une VAR qui suit une loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$ et Y la variable définie par :

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a alors $E(X) = (-1) \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = 0$, donc $E(X)E(Y) = 0$.

Et de plus $XY = 0$ donc $E(XY) = 0$.

Mais il est pourtant clair que X et Y ne sont pas indépendantes :

$$P([X=0] \cap [Y=1]) = \frac{1}{3} \text{ et } P(X=0) \times P(Y=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Exemple 9 :

Soit X et Y deux VAR à valeurs dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ telles que la loi du couple (X, Y) est

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad P([X=i] \cap [Y=j]) = \begin{cases} \frac{1}{ni} & \text{si } 1 \leq j \leq i \\ 0 & \text{si } i < j \leq n. \end{cases}$$

Calculons l'espérance de la VAR XY . D'après la formule de transfert :

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} ijP([X=i] \cap [Y=j]) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i \frac{j}{n} + \sum_{j=i+1}^n 0 \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)}{6}.
 \end{aligned}$$

3 Somme de VAR discrètes

a Loi

Conseils méthodologiques :

Afin de déterminer la loi de $S = X + Y$, il faudra remarquer que :

$$\begin{aligned}
 P(S = k) &= P\left(\bigcup_{i=\dots}^{\dots} [X=i] \cap [Y=k-i]\right) = \sum_{i=\dots}^{\dots} P([X=i] \cap [Y=k-i]) \quad \text{union d'evt disjoints} \\
 \text{ou } P(S = k) &= P\left(\bigcup_{j=\dots}^{\dots} [X=k-j] \cap [Y=j]\right) = \sum_{j=\dots}^{\dots} P([X=k-j] \cap [Y=j]) \quad \text{union d'evt disjoints.}
 \end{aligned}$$

On pensera à adapter les bornes en fonction de $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

Exemple 10 :

On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p .

Déterminons la loi de $Z = X + Y$.

On a tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Pour calculer $P(Z = n)$, comme indiqué dans le point méthode ci-dessus, il remarquer que $[Z = n] = \bigcup_{i=\dots}^{\dots} [X=i] \cap [Y=n-i]$.

Pour « remplir » les pointillés, il faut raisonner en cohérence avec les supports de X et Y .

Dans cette exemple on a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc il faut que $i \in \mathbb{N}^*$ et $n-i \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} i \geq 1 \\ n-i \geq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} i \geq 1 \\ i \leq n-1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 1 \leq i \leq n-1.$$

Donc, pour tout $n \in Z(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
P(Z = n)P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}[X = i] \cap [Y = n - i]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} P([X = i] \cap [Y = n - i]) && \text{union d'évts disjoints} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} P(X = i) \times P(Y = n - i) && \text{VAR indépendantes} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} p(1-p)^{i-1} \times p(1-p)^{n-i-1} \\
&= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.
\end{aligned}$$

Exemple 11 :

On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit la loi uniforme sur $\llbracket 2; 10 \rrbracket$ et Y suit la loi uniforme sur $\llbracket 0; 5 \rrbracket$.

Déterminons la loi de $S = X + Y$.

On a tout d'abord $S(\Omega) = \llbracket 2; 15 \rrbracket$. Nous allons voir ici qu'il est plus délicat de « remplir » les pointillés dans $[S = k] = \bigcup_{i=\dots}^{\dots} [X = i] \cap [Y = k - i]$.

Dans cette exemple $X(\Omega) = \llbracket 2; 10 \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \llbracket 0; 5 \rrbracket$. Donc il faut que $i \in \llbracket 2; 10 \rrbracket$ et $k - i \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 2 \leq i \leq 10 \\ 0 \leq k - i \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq i \leq 10 \\ k - 5 \leq i \leq k \end{cases}.$$

Pour réunir ces deux conditions sur i en une seule, on se rend compte qu'il faut faire une disjonction de cas.

— Si $2 \leq k \leq 7$: on a alors $\begin{cases} 2 \leq i \leq 10 \\ k - 5 \leq i \leq k \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq i \leq k$. Donc

$$\begin{aligned}
P(S = k) &= P\left(\bigcup_{i=2}^k [X = i] \cap [Y = k - i]\right) \\
&= \sum_{i=2}^k P([X = i] \cap [Y = k - i]) && \text{union d'évts disjoints} \\
&= \sum_{i=2}^k P(X = i) \times P(Y = k - i) && \text{VAR indépendantes} \\
&= \sum_{i=2}^k \frac{1}{9} \times \frac{1}{6} = \frac{k-1}{54}.
\end{aligned}$$

— Si $7 < k \leq 10$: on a alors $\begin{cases} 2 \leq i \leq 10 \\ k - 5 \leq i \leq k \end{cases} \Leftrightarrow k - 5 \leq i \leq k$. Donc

$$P(S = k) = \sum_{i=k-5}^k P([X = i] \cap [Y = k - i]) \sum_{i=k-5}^k \frac{1}{9} \times \frac{1}{6} = \frac{6}{54} = \frac{1}{9}.$$

— Si $10 < k \leq 15$: on a alors $\begin{cases} 2 \leq i \leq 10 \\ k - 5 \leq i \leq k \end{cases} \Leftrightarrow k - 5 \leq i \leq 10$. Donc

$$P(S = k) = \sum_{i=k-5}^{10} P([X = i] \cap [Y = k - i]) = \sum_{i=k-5}^{10} \frac{1}{9} \times \frac{1}{6} = \frac{16 - k}{54}.$$

b Somme de lois de Bernoulli

Théorème 2

Soient $X_1, \dots, X_n$ des VAR mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in [0; 1]$).

Alors la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Remarques :

- Ce théorème permet de comprendre une nouvelle fois l'interprétation d'une loi binomiale. On effectue n expériences indépendantes et on s'intéresse au nombre X de réalisation d'un événement A de probabilités p . On peut alors noter X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'événement A est réalisé lors de la $i^{\text{ème}}$ expérience et 0 sinon. X_i suit donc la loi de Bernoulli de paramètre p , et comme les expériences sont indépendantes, les variables X_i sont mutuellement indépendantes. On remarque alors que $X = X_1 + \dots + X_n$.
- Ce résultat est parfois admis en première année. Vous pourrez trouver une démonstration encore plus générale en exercice.

c Somme de lois de Poisson

Propriété 2

Soient $X_1, \dots, X_n$ des VAR mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Alors la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

Démonstration :

Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « si $X_1, \dots, X_n$ sont des VAR mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alors la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$. » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

* Pour $n = 1$ la propriété est évidemment vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée.

On se donne $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ des VAR mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$.

On pose $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et $Y = X_1 + \dots + X_n + X_{n+1} = Z + X_{n+1}$.

D'après $\mathcal{P}(n)$ on sait que Z suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

D'après le lemme des coalitions, on sait que Z et X_{n+1} sont indépendantes.

Trouvons maintenant la loi de Y . On a donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P(Y = i) &= P\left(\bigcup_{k=0}^i [Z = k] \cap [X_{n+1} = i - k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^i P([Z = k] \cap [X_{n+1} = i - k]) && \text{union d'évt disjoints} \\
&= \sum_{k=0}^i P(Z = k) \times P(X_{n+1} = i - k) && Z \text{ et } X_{n+1} \text{ indépendantes} \\
&= \sum_{k=0}^i e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^k}{k!} \times e^{-\lambda_{n+1}} \frac{(\lambda_{n+1})^{i-k}}{(i-k)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1})}}{i!} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^k (\lambda_{n+1})^{i-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1})}}{i!} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1})^i
\end{aligned}$$

Donc Y suit bien une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1}$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré la propriété annoncée.

□

4 Covariance

a Définition

Définition 5

Soient X et Y deux VAR discrètes ou finies admettant des espérances.

On appelle **covariance de X et de Y** le nombre réel $\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$, lorsque cette espérance existe.

Propriété 3

On considère X , Y et Z trois variables aléatoires réelles discrètes ou finies admettant des espérances et telles que les covariances ci-dessous existent, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$.
- $\text{cov}(X, X) = V(X)$.
- $\text{cov}(X + \alpha Y, Z) = \text{cov}(X, Z) + \alpha \text{cov}(Y, Z)$ et $\text{cov}(X, Y + \alpha Z) = \text{cov}(X, Y) + \alpha \text{cov}(X, Z)$.

Théorème 3 : Formule de Kœnig-Huygens

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes ou finies admettant des espérances.

Alors $\text{cov}(X, Y)$ existe si, et seulement si, $E(XY)$ existe et en cas d'existence :

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Conseils méthodologiques :

Le plus souvent pour calculer la covariance d'un couple de variables aléatoires on utilise la formule donnée dans ce théorème et non celle donnée dans la définition.

Propriété 4

Si X et Y sont deux VAR indépendantes, on a $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Remarque :

La réciproque est en générale fausse. Dans l'exemple 8, $\text{cov}(X, Y) = 0$ mais X et Y ne sont pas indépendantes.

Lorsque $\text{cov}(X, Y) = 0$, on dit que X et Y sont **non corrélées**.

b Lien entre covariance et variance

Théorème 4

Soient X et Y deux VAR discrètes ou finies admettant chacune une variance. Alors, pour tout réels a et b , $aX + bY$ admet une variance et :

$$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab \text{ cov}(X, Y).$$

Remarque :

On en déduit facilement que $\text{cov}(X, Y) = \frac{V(X + Y) - V(X) - V(Y)}{2}$.

Démonstration :

Admettons l'existence de la variance et démontrons uniquement la formule.

D'après la formule de Kœnig-Huygens et grâce à la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} V(aX + bY) &= E((aX + bY)^2) - E(aX + bY)^2 \\ &= E(a^2X^2 + 2abXY + b^2Y^2) - [aE(X) + bE(Y)]^2 \\ &= a^2E(X^2) + 2abE(XY) + b^2E(Y^2) - a^2E(X)^2 - 2abE(X)E(Y) - b^2E(Y)^2 \\ &= a^2[E(X^2) - E(X)^2] + b^2[E(Y^2) - E(Y)^2] + 2ab[E(XY) - E(X)E(Y)] \\ &= a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab \text{ cov}(X, Y). \end{aligned}$$

□

Corollaire 1

Si X et Y sont deux VAR discrètes ou finies indépendantes **alors** on a $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Remarque :

Encore une fois la réciproque à ce résultat est en général fausse.