Applications linéaires

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps des scalaires et il sera égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. n et p désigneront deux entiers naturels non nuls.

E et G désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I Généralités

1 *Définitions*

Définition 1

Soit f une application de E dans G. On dit que f est une **application linéaire** ou encore un **morphisme** de E dans G si, et seulement si :
- $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$, $f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})$;
- $\forall \overrightarrow{u} \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda \overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u})$.

Propriété 1

Soit f une application de E dans G. f est une application linéaire de E dans G si, et seulement si :

$$\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + \lambda f(\overrightarrow{v})$$

Vocabulaire et notations :

$\mathscr{L}(E,G)$	ensemble des applications linéaires de E dans G
endomorphisme de E	application linéaire de E dans E
$\mathscr{L}(E)$	ensemble des endomorphismes de E
$0_{E,G}$	application nulle de E dans G : $\forall \overrightarrow{u} \in E$, $0_{E,G}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}_G$
id_E	application identité de E dans E : $\forall \overrightarrow{u} \in E$, $\mathrm{id}_E(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$
isomorphisme de E dans G	application linéaire et bijective de E dans G
E et G sont isomorphes	se dit s'il existe un isomorphisme de E dans G
f^n ($n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$)	$f^0 = \mathrm{id}_E$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$

Exemple 1 :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixée et I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrons que l'application $g : P \mapsto P(0)I_n + P(1)A$ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient Q et R deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a $g(Q + \lambda R) = (Q + \lambda R)(0)I_n + (Q + \lambda R)(1)A = Q(0)I_n + Q(1)A + \lambda(R(0)I_n + R(1)A) = g(Q) + \lambda g(R)$.
Donc g est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 2 :

Soit f l'application qui à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $f(M) = \dfrac{a+d}{2} I_2 + \dfrac{b+c}{2} J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrons que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Nous avons ici deux choses à vérifier : tout d'abord que pour la fonction f l'espace de départ et celui d'arrivée sont les mêmes. Ensuite il faut vérifier que f est bien une application linéaire.
- On remarque tout d'abord que $f(M)$ est une combinaison linéaire de deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc $f(M) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- Soit maintenant K et L deux éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et soit α un réel.
  On doit démontrer que $f(K + \alpha L) = f(K) + \alpha f(L)$.
  Pour cela nous sommes obligés de donner des noms aux coefficients des matrices K et L.

Notons $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_3 & \ell_4 \end{pmatrix}$.

On a donc : $f(K) + \alpha f(L) = \dfrac{k_1 + k_4}{2} I_2 + \dfrac{k_2 + k_3}{2} J + \alpha \left(\dfrac{\ell_1 + \ell_4}{2} I_2 + \dfrac{\ell_2 + \ell_3}{2} J \right)$

De plus, $K + \alpha L = \begin{pmatrix} k_1 + \alpha \ell_1 & k_2 + \alpha \ell_2 \\ k_3 + \alpha \ell_3 & k_4 + \alpha \ell_4 \end{pmatrix}$.

Donc $f(K + \alpha L) = \dfrac{k_1 + \alpha \ell_1 + k_4 + \alpha \ell_4}{2} I_2 + \dfrac{k_2 + \alpha \ell_2 + k_3 + \alpha \ell_3}{2} J$.

Donc on voit bien que $f(K + \alpha L) = f(K) + \alpha f(L)$. f est bien une application linéaire.

Ainsi f est bien un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2 *Propriétés*

Propriété 2

Soit $f \in \mathscr{L}(E, G)$. Alors $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_G$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
& f(\overrightarrow{0}_E) = f(\overrightarrow{0}_E + \overrightarrow{0}_E) && \text{propriété du vecteur nul} \\
\Longrightarrow\ & f(\overrightarrow{0}_E) = f(\overrightarrow{0}_E) + f(\overrightarrow{0}_E) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\
\Longrightarrow\ & \overrightarrow{0}_G = f(\overrightarrow{0}_E) && \text{en ajoutant } -f(\overrightarrow{0}_E) \text{ de chaque côté}
\end{aligned}$$

Donc $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_G$.

□

Propriété 3

Soient f et g deux éléments de $\mathscr{L}(E, G)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Alors $f + \alpha g$ est une application linéaire de E dans G.

Démonstration :

$\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
(f + \alpha g)(\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v}) &= f(\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v}) + \alpha g(\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v}) \quad \text{définition d'une somme de fonctions} \\
&= f(\overrightarrow{u}) + \lambda f(\overrightarrow{v}) + \alpha g(\overrightarrow{u}) + \alpha \lambda g(\overrightarrow{v}) \text{ car } f \text{ et } g \text{ linéaires} \\
&= (f + \alpha g)(\overrightarrow{u}) + \lambda (f + \alpha g)(\overrightarrow{v})
\end{aligned}$$

Donc $f + \alpha g$ est une application linéaire.

□

Propriété 4

Soient E, G et H trois espaces vectoriels.
Si $f \in \mathscr{L}(E, G)$ et $g \in \mathscr{L}(G, H)$ alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans H.

Démonstration :

$\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v}) &= g\left(f(\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v})\right) && \text{définition de la composée} \\
&= g\left(f(\overrightarrow{u}) + \lambda f(\overrightarrow{v})\right) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\
&= g\left(f(\overrightarrow{u})\right) + \lambda g\left(f(\overrightarrow{v})\right) && \text{car } g \text{ est linéaire} \\
&= (g \circ f)(\overrightarrow{u}) + \lambda (g \circ f)(\overrightarrow{v})
\end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est une application linéaire.

□

Corollaire 1
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^n est aussi un endomorphisme de E.

Propriété 5
Soient E, G et H trois espaces vectoriels.
Si f et g appartiennent à $\mathscr{L}(E, G)$ et $h \in \mathscr{L}(G, H)$ alors $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$.

Démonstration :

Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$:

$$\begin{aligned}
(h \circ (f+g))(\overrightarrow{u}) &= h\left((f+g)(\overrightarrow{u})\right) && \text{définition d'une composée de fonctions}\\
&= h\left(f(\overrightarrow{u}) + g(\overrightarrow{u})\right) && \text{définition d'une somme de fonctions}\\
&= h(f(\overrightarrow{u})) + h(g(\overrightarrow{u})) && \text{car } h \text{ est linéaire}\\
&= (h \circ f)(\overrightarrow{u}) + (h \circ g)(\overrightarrow{u}) &&\\
&= (h \circ f + h \circ g)(\overrightarrow{u}) && \text{définition d'une somme de fonctions.}
\end{aligned}$$

Donc $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$.

□

Propriété 6 : Formule du binôme
Soient f et g deux endomorphismes de E. Si $f \circ g = g \circ f$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

Propriété 7
Si f est un isomorphisme de E dans G alors f^{-1} est un isomorphisme de G dans E.

Démonstration :

Il s'agit ici de montrer que f^{-1} est une application linéaire car par définition d'une bijection réciproque f^{-1} est bien une application bijective de G dans E.
$\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in G$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
f\left(f^{-1}(\overrightarrow{u}) + \lambda f^{-1}(\overrightarrow{v})\right) &= f\left(f^{-1}(\overrightarrow{u})\right) + \lambda f\left(f^{-1}(\overrightarrow{v})\right) && \text{car } f \text{ est linéaire}\\
&= \overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v} &&\\
\Longrightarrow f^{-1}(\overrightarrow{u}) + \lambda f^{-1}(\overrightarrow{v}) &= f^{-1}(\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v}) && \text{en composant par } f^{-1}
\end{aligned}$$

Donc f^{-1} est bien une application linéaire.

□

II Éléments caractéristiques

1 *Image*

Définition 2
Soient E et G deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, G)$. On appelle **image** de l'application linéaire f, et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \{f(\overrightarrow{u}) / \overrightarrow{u} \in E\}\\
&= \{\overrightarrow{w} \in G / \exists \overrightarrow{u} \in E, \text{ tel que } \overrightarrow{w} = f(\overrightarrow{u})\}.
\end{aligned}$$

Remarque :

Les deux égalités sont importantes à connaitre. Suivant le contexte de l'exercice l'une sera plus adaptée que l'autre.

Propriété 8

Soit $f \in \mathscr{L}(E,G)$. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de G.

Démonstration :

— Par définition, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-ensemble de G.
— On a vu que $\overrightarrow{0}_G = f(\overrightarrow{0}_E)$ donc $\overrightarrow{0}_G \in \mathrm{Im}(f)$.
— Soient $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathrm{Im}(f)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Par définition de l'image, il existe $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$ tels que $\overrightarrow{x} = f(\overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{v})$.
Donc $\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{u}) + \lambda f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v})$, car f est linéaire.
Ainsi, $\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(f)$.

En conclusion $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de G.

□

Voici une propriété très utile car elle donne une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$:

Propriété 9

Soient E un espace vectoriel de dimension finie p, et $(\overrightarrow{e}_1, \cdots, \overrightarrow{e}_p)$ une base de E. Soient G un espace vectoriel quelconque et $f \in \mathscr{L}(E,G)$.
Alors $(f(\overrightarrow{e}_1), \cdots, f(\overrightarrow{e}_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(\overrightarrow{e}_1), \cdots, f(\overrightarrow{e}_p)).$$

Ce que je dois savoir faire :

Je dois savoir trouver une base et donc la dimension de l'image d'une application linéaire.
Pour trouver une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ il y a deux méthodes principales :
— Écrire la définition de $\mathrm{Im}(f)$, puis par quelques « manipulations » faire apparaitre une famille génératrice.
— Utiliser la propriété 9.

Exemple 3 :

Reprenons la fonction f de l'exemple 2.
On cherche une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.
Pour cet endomorphisme on peut écrire tout simplement la définition de l'image :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \{f(M)/M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\}\\ &= \left\{\frac{a+d}{2}I + \frac{b+c}{2}J/(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\}\\ &= \left\{a \times \frac{1}{2}I + d \times \frac{1}{2}I + b \times \frac{1}{2}J + c \times \frac{1}{2}J/(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\}\\ &= \mathrm{vect}\left(\frac{1}{2}I, \frac{1}{2}I, \frac{1}{2}J, \frac{1}{2}J\right) = \mathrm{vect}\left(\frac{1}{2}I, \frac{1}{2}J\right) = \mathrm{vect}(I,J)\end{aligned}$$

Donc on voit que la famille (I,J) est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
C'est une famille de deux vecteurs visiblement non proportionnels donc la famille (I,J) est libre.
Donc (I,J) est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et ainsi $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

Exemple 4 :

On considère l'application f qui, à tout élément P de $\mathbb{R}_2[X]$ associe le polynôme Q tel que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel :} \qquad Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et on cherche une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.
On peut tout d'abord reformuler l'énoncé en écrivant : $f(P) = (X-1)P' + P$.

Voyons ici une autre méthode que celle de l'exemple précédent.

D'après la propriété 9 : en prenant la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, $(1, X, X^2)$, on sait que $(f(1), f(X), f(X^2))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Il ne reste plus qu'à vérifier que cette famille est libre. On a :

$$f(1) = 1 \qquad f(X) = 2X - 1 \qquad f(X^2) = 3X^2 - 2X$$

La famille $(1, 2X - 1, 3X^2 - 2X)$ est libre car ce sont des polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts.

Donc $(1, 2X - 1, 3X^2 - 2X)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$.

Propriété 10

Soit $f \in \mathscr{L}(E, G)$. f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = G$

Exemple 5 :

Dans l'exemple précédent, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.

Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$ et donc f est surjective.

2 Noyau

Définition 3

Soient E et G deux espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E, G)$. On appelle **noyau** de l'application linéaire f, et on note $\ker(f)$, l'ensemble suivant :

$$\ker(f) = \left\{ \overrightarrow{u} \in E / f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}_G \right\}.$$

Propriété 11

$\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :

— Par définition, $\ker(f)$ est un sous-ensemble de E.

— On a vu que $f(\overrightarrow{0}_E) = \overrightarrow{0}_G$ donc $\overrightarrow{0}_E \in \ker(f)$.

— Soient $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \ker(f)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{x} + \lambda \overrightarrow{y}) &= f(\overrightarrow{x}) + \lambda f(\overrightarrow{y}) && f \text{ est linéaire} \\ &= \overrightarrow{0}_G + \lambda \overrightarrow{0}_G && \text{car } \overrightarrow{x} \text{ et } \overrightarrow{y} \text{ sont dans } \ker(f) \\ &= \overrightarrow{0}_G. \end{aligned}$$

Ainsi, $\overrightarrow{x} + \lambda \overrightarrow{y} \in \ker(f)$.

En conclusion $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

□

Ce que je dois savoir faire :

Je dois savoir déterminer une base, et donc la dimension, du noyau d'une application linéaire :

— Je résous l'équation $f(\overrightarrow{u}) = 0$.

— J'écris $\ker(f) =$*ensemble des solutions*.

— Je trouve alors une base de $\ker(f)$ (je trouve une famille génératrice puis je regarde si cette famille est libre)

Exemple 6 :

On considère l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = M + (a + d)I_2$ avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

On souhaite déterminer le noyau de f et, si possible, une base et la dimension de ce noyau.

On commence par écrire la définition du noyau : $\ker(f) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) / f(M) = 0\}$.

On voit donc qu'il nous faut résoudre l'équation $f(M) = 0$:

$$f(M) = 0 \Leftrightarrow M + (a+d)I_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (a+d)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+a+d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d+a+d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$$

Ainsi $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. *On ne peut pas ici déterminer une base de* $\ker(f)$.

Théorème 1
Soit $f \in \mathscr{L}(E, G)$. Alors :

$$f \text{ est injective } \Leftrightarrow \ker(f) = \{\overrightarrow{0}_E\}.$$

Démonstration :

— $\Longrightarrow$: supposons que f est injective.
Alors $\overrightarrow{0}_G$ admet au plus un antécédent par f et comme $\overrightarrow{0}_E$ en est un, il n'y en a pas d'autre.
Ainsi $\ker(f) = \{\overrightarrow{0}_E\}$.

— $\Longleftarrow$: Supposons que $\ker(f) = \{\overrightarrow{0}_E\}$.
On a alors, pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E$:

$$f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{v}) \Leftrightarrow f(\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}_G \Leftrightarrow f(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}_G \text{ car } f \text{ linéaire}$$

On a donc montré que $f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{v}) \Leftrightarrow \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \in \ker(f)$. Et comme on a supposé que $\ker(f) = \{\overrightarrow{0}_E\}$, on a :

$$f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{v}) \Leftrightarrow \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}_E \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.$$

f est donc injective.

□

Ce que je dois savoir faire :
Si on m'a déjà demandé de répondre à la question « Déterminer le noyau de f », je dois savoir répondre rapidement à la question « f est-elle injective ? » :

— Si on a montré que $\ker(f) = \{0\}$ alors f est injective.
— Si on a montré que $\ker(f)$ contient d'autres éléments que 0 alors f n'est pas injective.

Exemple 7 :
Dans l'exemple précédent, on peut affirmer que f est une application linéaire injective.

3 Rang

Définition 4
On appelle **rang d'une application linéaire** $f \in \mathscr{L}(E, G)$, et on note $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ si celle-ci existe.

Théorème 2 : Théorème du rang
Soit $f \in \mathscr{L}(E, G)$, avec ***E* espace vectoriel de dimension finie** et G espace vectoriel quelconque. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et on a l'égalité suivante :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Remarque :
Résultat admis en BCPST.

Conseils méthodologiques : Lorsqu'on connait la dimension du noyau ou de l'image d'une application linéaire, il faut penser à utiliser le théorème du rang pour déterminer la dimension de l'autre. Cela permet parfois d'éviter de gros calculs inutiles.

Exemple 8 :

Reprenons l'exemple 2. On admet que $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 4$. Déterminons une base du noyau de f.

On a vu, dans l'exemple 3, que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. D'après le théorème du rang, on a donc :

$$\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) \Leftrightarrow 4 = \dim(\ker(f)) + 2 \Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 2.$$

Or on remarque que $f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right) = 0$ et $f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right) = 0$.

La famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est une famille visiblement libre (deux matrices non proportionnelles) de deux vecteurs de $\ker(f)$ et on a vu que $\dim(\ker(f)) = 2$.

Donc $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(f)$.

Dans cet exemple le calcul direct n'est pas beaucoup plus long, mais l'idée utilisée ici est à retenir !

Dans toute la suite du chapitre E et G sont deux espaces vectoriels de dimension finie, $\dim(E) = p$, $\dim(G) = n$, $\mathscr{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ désigne une base de E et $\mathscr{B}_G = (\overrightarrow{g_1}, \ldots, \overrightarrow{g_n})$ désigne une base de G.

III Isomorphismes en dimension finie

1 *Propriétés*

Propriété 12

Soit $f \in \mathscr{L}(E, G)$.

f est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base de E par f est une base de G.

Démonstration :

— $\Longrightarrow$: supposons que f est un isomorphisme.
Soit $\mathscr{B}_E = (\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_p)$ une base de E.
On sait alors (propriété 9) que $(f(\overrightarrow{e}_1), \ldots, f(\overrightarrow{e}_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Or f est surjective donc $\mathrm{Im}(f) = G$.
$(f(\overrightarrow{e}_1), \ldots, f(\overrightarrow{e}_p))$ est donc une famille génératrice de G.
Montrons que cette famille est aussi libre.
On cherche tous les scalaires $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que :

$$\begin{aligned}
& a_1 f(\overrightarrow{e}_1) + \ldots a_p f(\overrightarrow{e}_p) = \overrightarrow{0_G} & \\
\Leftrightarrow & f\left(a_1 \overrightarrow{e}_1 + \ldots a_p \overrightarrow{e}_p\right) = \overrightarrow{0_G} & \text{par linéarité de } f \\
\Leftrightarrow & f\left(a_1 \overrightarrow{e}_1 + \ldots a_p \overrightarrow{e}_p\right) = f(\overrightarrow{0_E}) & \\
\Leftrightarrow & a_1 \overrightarrow{e}_1 + \ldots + a_p \overrightarrow{e}_p = \overrightarrow{0_E} & \text{car } f \text{ est injective} \\
\Leftrightarrow & a_1 = \ldots = a_p = 0 & \text{car la famille } \mathscr{B}_E \text{ est libre.}
\end{aligned}$$

Donc la famille $(f(\overrightarrow{e}_1), \ldots, f(\overrightarrow{e}_p))$ est libre.
Ainsi $(f(\overrightarrow{e}_1), \ldots, f(\overrightarrow{e}_p))$ est une base de G.

— $\Longleftarrow$: On suppose ici que lorsque $\mathscr{B}$ est une base de E, $f(\mathscr{B})$ est une base de G.
Or, d'après la propriété 9, $f(\mathscr{B})$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, on en déduit que $f(\mathscr{B})$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et donc $\mathrm{Im}(f) = G$ et ainsi f est surjective.
Montrons maintenant que f est injective grâce au théorème du rang.
f est une application linéaire et E est de dimension finie donc, d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned}
& \dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) & \\
\Leftrightarrow & \mathrm{card}(\mathscr{B}) = \mathrm{card}(f(\mathscr{B})) + \dim(\ker(f)) & \\
& \text{car } \mathscr{B} \text{ est une base de } E \text{ et } f(\mathscr{B}) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f) & \\
\Leftrightarrow & 0 = \dim(\ker(f)) & \text{car } \mathrm{card}(\mathscr{B}) = \mathrm{card}(f(\mathscr{B})).
\end{aligned}$$

On a donc $\dim(\ker(f)) = 0$, ce qui signifie que $\ker(f) = \{\overrightarrow{0}_E\}$ et donc que f est injective.
En conclusion, f est bijective et donc c'est un isomorphisme de E dans G.

□

Corollaire 2
Si f est un isomorphisme de E dans G **alors** $\dim(E) = \dim(G)$.

Remarque :
Découle directement de la propriété précédente.

Théorème 3
Soient E et G deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(G)$, et soit f une application linéaire de E dans G. Alors on a :

$$f \text{ est bijective} \Leftrightarrow f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective}$$

Théorème 4
Tout espace vectoriel de dimension p est isomorphe à $\mathbb{K}^p$.

Démonstration :

Il suffit de considérer l'application linéaire :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} x_i \overrightarrow{e}_i \end{array}$$

où $(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_p)$ est une base de E.

On montre facilement que f est injective et comme $\dim(E) = p = \dim(\mathbb{K}^p)$, f est bijective et donc f est un isomorphisme entre E et $\mathbb{K}^p$.

□

2 *Méthode*

Le théorème suivant résume toutes les méthodes, connues pour l'instant, pour montrer qu'une application linéaire, entre deux espaces de dimension finie, est bijective :

Théorème 5
Soient E et G deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans G. Alors toutes les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective (autrement dit f est un isomorphisme) ;
(ii) l'image par f d'une base de E est une base de G ;
(iii) f est injective et $\dim(E) = \dim(G)$;
(iv) f est surjective et $\dim(E) = \dim(G)$

Exemple 9 :
Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On définit l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^4$ par $\varphi(e_i) = e_{i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $\varphi(e_4) = e_1$.

On peut remarquer rapidement que l'image de la base (e_1, e_2, e_3, e_4) par φ est la famille (e_2, e_3, e_4, e_1) qui est aussi une base de $\mathbb{R}^4$.

Donc comme φ transforme une base en une autre base, on peut dire que φ est bijectif et donc c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même.

Exemple 10 :
Soit φ l'application linéaire de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_3[X]$ définie par

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a+b)X^3 + (b+\mathrm{i}c)X^2 + (\mathrm{i}c+d)X + d - a.$$

On admet que $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{C})) = 4$. Montrons que φ est un isomorphisme.

— Déterminons le noyau de φ :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+\mathrm{i}c=0 \\ \mathrm{i}c+d=0 \\ d-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=0 \\ b=a \\ c=\mathrm{i}a \\ d=a \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=d=0.$$

Donc $\ker(\varphi) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$. φ est donc injective.

— De plus $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{C})) = 4 = \dim(\mathbb{C}_3[X])$.

Des deux points précédents nous pouvons déduire que φ est bijective et donc φ est un isomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_3[X]$.

IV Applications linéaires et matrices

1 *Propriété préliminaire*

Propriété 13 : Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base
On rappelle que E est un espace vectoriel de dimension finie p, et $\mathscr{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est une base de E. Dans cette propriété, G est un espace vectoriel quelconque et $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de p vecteurs de G.
Alors il existe une unique application linéaire φ de E dans G, telle que $\varphi(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{u_i}$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$.

Remarque :
Cette propriété signifie que pour connaitre entièrement une application linéaire sur un espace de dimension finie il suffit de connaitre les images des éléments d'une base.

Démonstration :

— **Unicité** :
Supposons qu'il existe deux applications linéaires φ et γ de E dans G vérifiant les hypothèses de l'énoncé.
Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, il existe $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{p} a_p \overrightarrow{e_i}$.
On a alors, par linéarité de φ : $\varphi(\overrightarrow{x}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{p} a_i \overrightarrow{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{p} a_i \varphi(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{p} a_i \overrightarrow{u_i}$.
Et de même $\gamma(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{p} a_i \overrightarrow{u_i}$. Donc $\varphi = \gamma$. Si une telle application existe, elle est unique.

— **Existence** :
Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, on pose $\varphi(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{p} a_i \overrightarrow{u_i}$, où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$. Vérifions que φ est bien une application linéaire de E dans G telle que $\varphi(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{u_i}$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$.
D'après sa définition φ est bien une application de E dans G.
On considère maintenant $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ quelconques. On note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\overrightarrow{y}) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$. On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y}) = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda b_1 \\ \vdots \\ a_p + \lambda b_p \end{pmatrix}$ et donc, par définition de φ :

$$\varphi(\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y}) = \sum_{i=1}^{p} (a_i + \lambda b_i)\overrightarrow{u_i} = \sum_{i=1}^{p} a_i \overrightarrow{u_i} + \lambda \sum_{i=1}^{p} b_i \overrightarrow{u_i} = \varphi(\overrightarrow{x}) + \lambda\varphi(\overrightarrow{y}).$$

Ainsi φ est bien linéaire.

Enfin, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $\text{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\overrightarrow{e}_i) = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, le 1 étant à la $i^{\text{ème}}$ place.

Donc $\varphi(\overrightarrow{e_i}) = 0\overrightarrow{u_1} + \ldots + 0\overrightarrow{u_{i-1}} + 1\overrightarrow{u_i} + 0\overrightarrow{u_{i+1}} + \ldots + 0\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{u_i}$.

□

Ce que je dois savoir faire :

Si on me donne uniquement les valeurs des images d'une base de E, je dois savoir calculer la valeur de l'image de n'importe quel autre vecteur de E.

Exemple 11 :

On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $(1, X, X^2)$ ainsi que l'application $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2)$ définie par :

$$f(1) = (1, 0) \quad f(X) = (2, -1) \quad f(X^2) = (-3, 1)$$

Calculer $f(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

On considère un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$. On sait que $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Donc, comme f est une application linéaire :

$$\begin{aligned} f(P) = f(aX^2 + bX + c) &= af(X^2) + bf(X) + cf(1) \\ &= a(-3, 1) + b(2, -1) + c(1, 0) = (-3a + 2b + c, a - b). \end{aligned}$$

2 *Matrice associée à une application linéaire*

Définition 5

Soit $f \in \mathscr{L}(E, G)$. Pour $1 \leqslant j \leqslant p$, on note $(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$ les coordonnées du vecteur $f(\overrightarrow{e}_j)$ dans la base $\mathscr{B}_G$:

$$f(\overrightarrow{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \overrightarrow{g_i}$$

On appelle **matrice de l'application linéaire f relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_G$** la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où $a_{i,j}$ est le scalaire situé sur la ligne i et la colonne j.

La $j$ème colonne de A contient les coordonnées de $f(\overrightarrow{e}_j)$ dans la base $\mathscr{B}_G$.

On note $\text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_G}(f)$ la matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_G$.

Remarques :

- Les coordonnées des $f(\overrightarrow{e}_j)$ étant uniques, la matrice associée à f dans les bases données est unique.
- Réciproquement à toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ il correspond une unique application $f \in \mathscr{L}(E, G)$ (découle de la propriété 13).
- La matrice associée à un endomorphisme est une matrice carrée.

Conseils méthodologiques :

Je dois savoir déterminer la matrice d'une application linéaire donnée dans des bases données :

- On commence par bien identifier la base de l'espace de départ (on la notera $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ dans ce conseil méthodologique) et la base de l'espace d'arrivé (on la notera $\mathscr{B}_G = (g_1, \ldots, g_n)$ dans ce conseil méthodologique). *Pour un endomorphisme, dans la grande majorité des cas, on utilise la même base pour l'espace de départ et celui d'arrivé.*
- On calcule $f(e_1)$ et on écrit le résultat obtenu sous la forme : $f(e_1) = \square g_1 + \square g_2 + \ldots + \square g_n$.
  Les « boites » doivent contenir un nombre réel ou complexe. On peut trouver ces nombres de tête ou alors « par le calcul » (cf. méthode « déterminer les coordonnées d'un vecteur » dans le chapitre « Espaces vectoriels »).
- On effectue, successivement, la même chose pour $f(e_2)$ puis $f(e_3)$, …, $f(e_p)$.

— On construit alors la matrice $\text{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(f)$ en la remplissant une colonne après l'autre : dans la première colonne on met les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base $\mathscr{B}_G$, dans la deuxième colonne les coordonnées de $f(e_2)$ dans la base $\mathscr{B}_G$, ...

Exemple 12 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, -x_2 + 2x_3)$. On cherche ici la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Première étape : Je calcule $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ et j'exprime chacun de ces trois vecteurs en fonction de e_1, e_2, e_3.

$f(e_1) = (1 - 0, 2 \times 1 + 0 - 3 \times 0, -0 + 2 \times 0) = (1, 2, 0) = 1 \times e_1 + 2 \times e_2$
$f(e_2) = (0, 1, -1) = e_2 - e_3$
$f(e_3) = (-1, -3, 2) = -e_1 - 3e_2 + 2e_3$

Deuxième étape : Je construis la matrice dans laquelle je mets dans chaque colonne les coordonnées des $f(e_i)$. On a donc :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 13 :

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(a, b) = (a+2b)X^2 - bX + a$, $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On cherche la matrice de f relative aux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$.

Première étape : On a
$f(e_1) = f(1, 0) = X^2 + 1 = 1 \times 1 + 0 \times X + 1 \times X^2$.
$f(e_2) = f(0, 1) = 2X^2 - X = 0 \times 1 + (-1) \times X + 2 \times X^2$.

Deuxième étape : On a donc : $\text{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 14 :

On reprend l'application linéaire de l'exemple précédent. Déterminons maintenant la matrice de f relative aux bases $\mathscr{B}_3 = ((1, 2), (2, 1))$ et $\mathscr{B}_4 = (X^2, X(X-1), (X-1)^2)$.

On a tout d'abord $f(1, 2) = 5X^2 - 2X + 1$. On doit exprimer ce résultat comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathscr{B}_4$. On cherche donc a, b et c tels que

$$5X^2 - 2X + 1 = aX^2 + bX(X-1) + c(X-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Donc $f(1, 2) = 4X^2 + 0X(X-1) + (X-1)^2$.
De même, on trouve que $f(2, 1) = 4X^2 - X + 2 = 5X^2 - 3X(X-1) + 2(X-1)^2$.
Donc $\text{Mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_4}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Conseils méthodologiques : Je dois savoir déterminer une expression explicite de $f(\overrightarrow{u})$ à l'aide uniquement de la matrice de f relative à des bases données.

Exemple 15 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. On cherche à répondre à la question « Exprimer $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z. »

Soit $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

D'après la définition de la matrice associé à un endomorphisme on peut écrire :

$$f(e_1) = -e_1 - 4a_2 - 2e_3$$
$$f(e_2) = 2e_1 + 5e_2 + 2e_3$$
$$f(e_3) = -e_1 - 3e_2 - e_3$$

Donc pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ comme on a $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(-e_1 - 4e_2 - 2e_3) + y(2e_1 + 5e_2 + 2e_3) + z(-e_1 - 3e_2 - e_3) \\ &= (-x + 2y - z)e_1 + (-4x + 5y - 3z)e_2 + (-2x + 2y - z)e_3 \\ &= (-x + 2y - z, -4x + 5y - 3z, -2x + 2y - z) \end{aligned}$$

Exemple 16 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathscr{B}_c = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
On considère le polynôme $Q = 3X^2 - 2X + 1$. On souhaite calculer $f(Q)$.
On remarque que $f(Q) = f(3X^2 - 2X + 1) = 3f(X^2) - 2f(X) + f(1)$ car f est linéaire.
Or, d'après la définition de la matrice associé à un endomorphisme on peut écrire :

$$\begin{aligned} &f(1) = 3 \times 1 + (-3) \times X + 1 \times X^2 = 3 - 3X + X^2 \\ &f(X) = 1 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2 = 1 \\ &f(X^2) = 0 \times 1 + 1 \times X + 0 \times X^2 = X \end{aligned}$$

Donc $f(Q) = 3f(X^2) - 2f(X) + f(1) = 3X - 2 + 3 - 3X + X^2 = X^2 + 1$.

Exemple 17 : Plus dur

On note $u = (1, 2)$ et $v = (-2, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base (u, v) est $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Exprimer $f(x, y)$ en fonction de x et y.

La matrice A étant la matrice relative à la base (u, v) pour pouvoir l'utiliser pour calculer $f(x, y)$ il faut déterminer les coordonnées de (x, y) dans la base (u, v).

Pour cela on écrit :

$$(x, y) = au + bv \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 2b \\ y = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x + 2y}{5} \\ b = \dfrac{-2x + y}{5} \end{cases}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f\left(\frac{x + 2y}{5}u + \frac{-2x + y}{5}v\right) \\ &= \frac{x + 2y}{5}f(u) + \frac{-2x + y}{5}f(v) && \text{linéarité de } f \\ &= \frac{x + 2y}{5} \times 4u + \frac{-2x + y}{5} \times (-3v) && \text{d'après la matrice } A \\ &= \frac{1}{5}(-8x + 14y, 14x + 13y) \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \dfrac{1}{5}(-8x + 14y, 14x + 13y)$.

Théorème 6
Soit $f \in \mathscr{L}(E, G)$. Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ et $\overrightarrow{y} \in G$, on note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\overrightarrow{x})$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G}(\overrightarrow{y})$. On note de plus A la matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_G$.
Alors on a : $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) \Leftrightarrow Y = AX$.

Démonstration :

Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et $\overrightarrow{y} \in G$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G}(\overrightarrow{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, et enfin $A = (a_{i,j})_{i \in [\![1;n]\!], j \in [\![1;p]\!]}$.

— $\underline{\Longrightarrow :}$ On suppose que $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})$.

On a donc :

$$\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) = f\left(\sum_{k=1}^{p} x_k \overrightarrow{e_k}\right) \underset{f \text{ linéaire}}{=} \sum_{k=1}^{p} x_k f\left(\overrightarrow{e_k}\right) = \sum_{k=1}^{p} x_k \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \overrightarrow{g_i} \qquad \text{par définition de la matrice } A$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} x_k\right)\overrightarrow{g_i}$$

Or on a aussi $\overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{g_i}$, donc par unicité des coordonnées dans une base :

$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad y_i = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} x_k$, et donc $Y = AX$.

— $\underline{\Longleftarrow :}$ On suppose que $Y = AX$. On a alors : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $y_i = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} x_k$.

Donc

$$f(\overrightarrow{x}) = f\left(\sum_{k=1}^{p} x_k \overrightarrow{e_k}\right) \underset{f \text{ linéaire}}{=} \sum_{k=1}^{p} x_k f\left(\overrightarrow{e_k}\right) = \sum_{k=1}^{p} x_k \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \overrightarrow{g_i} \qquad \text{par définition de la matrice } A$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} x_k\right)\overrightarrow{g_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{g_i} = \overrightarrow{y}$$

On a donc bien $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y}$.

□

Conseils méthodologiques : Cette propriété est particulière utile pour résoudre des équation du type $f(\overrightarrow{u}) = ...$ lorsqu'on connait uniquement la matrice de f relative à des bases données.

Exemple 18 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminons le noyau de $f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}$.

On sait que $\ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / (f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]})(P) = 0\} = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / f(P) - P = 0\}$. Or, si on note $P = aX^2 + bX + c$, on a :

$$f(P) - P = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f(P) - P) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(0)$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(P) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c + b = 0 \\ -3c - b + a = 0 \\ c - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2c \\ 0 = 0 \\ a = c. \end{cases}$$

Donc $\ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}) = \{cX^2 - 2cX + c / c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((X-1)^2)$.

Propriété 14
Soient f et g deux morphismes de E dans G et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g);$$
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(\lambda f) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(f).$$

Propriété 15
Soit H un autre espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B}_H$. Soient aussi $f \in \mathscr{L}(E,G)$ et $g \in \mathscr{L}(G,H)$. Alors on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_H}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_H}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(f).$$

Propriété 16
Soit $f \in \mathscr{L}(E,G)$ avec $\underline{\dim(E) = \dim(G)}$ et M sa matrice relative aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_G$. Alors f est bijectif si, et seulement si, M est inversible et dans ce cas M^{-1} est la matrice de f^{-1} relativement aux bases $\mathscr{B}_G$ et $\mathscr{B}_E$.

Conseils méthodologiques :
Pour savoir si un morphisme est bijectif il suffit de regarder si sa matrice associée (dans n'importe quelle base) est inversible.
Exemple 19 :
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f(P) = \Big(P(0), P'(1), P''(2), P^{(3)}(3)\Big).$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
f(1) &= (1,0,0,0) = 1 \times (1,0,0,0) + 0 \times (0,1,0,0) + 0 \times (0,0,1,0) + 0 \times (0,0,0,1)\\
f(X) &= (0,1,0,0) = 0 \times (1,0,0,0) + 1 \times (0,1,0,0) + 0 \times (0,0,1,0) + 0 \times (0,0,0,1)\\
f(X^2) &= (0,2,2,0) = 0 \times (1,0,0,0) + 2 \times (0,1,0,0) + 2 \times (0,0,1,0) + 0 \times (0,0,0,1)\\
f(X^3) &= (0,3,12,6) = 0 \times (1,0,0,0) + 3 \times (0,1,0,0) + 12 \times (0,0,1,0) + 6 \times (0,0,0,1).
\end{aligned}$$

Donc la matrice de f relative aux bases canoniques des espaces considérés est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

On remarque que cette matrice est triangulaire sans 0 sur la diagonale donc elle est inversible et ainsi f est un isomorphisme.

4 Changement de base pour les endomorphismes

Propriété 17
On considère $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de l'espace vectoriel E et f un endomorphisme de E. Alors on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}.$$

Définition 6
Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Lorsqu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$, on dit que les matrices A et B sont **semblables**.

Remarque :
Deux matrices associées à un même endomorphisme mais relatives à deux bases différentes sont donc semblables.

Propriété 18
Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles sont la matrice d'un même endomorphisme relatives à deux bases différentes.

Remarque :
Nous verrons en exercice une application de cette propriété.

5 Noyau et image d'une matrice

Toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut être vue comme la matrice relative aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ de l'application linéaires $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ définie par :

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \left(\sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j, \sum_{j=1}^{p} a_{2,j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j \right).$$

Ce lien très fort qui existe entre applications linéaires et matrices conduit aux définitions suivantes :

Définition 7
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
— On appelle noyau de A l'ensemble : $\ker(A) = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) / AX = 0\}$.
— On appelle image de A l'ensemble : $\mathrm{Im}(A) = \{AX \ / \ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$.

Propriété 19
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
— $\ker(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
— $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Propriété 20
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible $\Leftrightarrow \ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Propriété 21
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$.

Propriété 22
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $f \in \mathscr{L}(E, G)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_G}(f)$. Alors :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f) \qquad \text{et} \qquad \dim(\ker(A)) = \dim(\ker(f)).$$

Propriété 23
Deux matrices semblables ont le même rang.

Théorème 7 : Théorème du rang pour les matrices
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors on a

$$\dim(\ker(A)) + \mathrm{rg}(A) = p.$$