

DEVOIR MAISON N° 14

À RENDRE LE 2 FÉVRIER 2026

Sujet oral Agro-véto

Question de cours

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire soit injective.

Exercice avec préparation

Soient $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant chacune une même loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $n \geq 2$, on note $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, et on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. a) Soit U une variable aléatoire, de loi uniforme sur $]0; 1]$. Vérifier que la variable $-\ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.
b) En déduire une fonction Python qui prend un entier n en entrée, et renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_n .
c) En admettant que la variable aléatoire Y_n admet une espérance, à l'aide de la fonction Python précédente, conjecturer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(Y_n)}{S_n}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe n un entier tel que $n \geq 2$.

2. On note F_n la fonction de répartition de Y_n .

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

En déduire que la variable Y_n est une variable à densité, et déterminer une densité f_n de Y_n .

3. a) Montrer que pour tout réel u de $[0; 1]$, on a : $(1 - u)^n \geq 1 - nu$.
b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))dx$ est convergente et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F_n(x)) = 0$.
4. a) Pour tout $A > 0$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_0^A x f_n(x) dx = \int_0^A (1 - F_n(x)) dx - A(1 - F_n(A)).$$

- b) En déduire que la variable Y_n admet une espérance, vérifiant :

$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(x)) dx.$$

5. À l'aide du changement de variable $t = 1 - e^{-x}$, montrer que :

$$E(Y_n) = \int_0^1 \frac{1 - t^n}{1 - t} dt,$$

et en déduire finalement que : $E(Y_n) = S_n$.