

Programme de colle de la semaine n° 13

5 au 9 janvier 2026

La démonstration des propriétés en **gras** pourra faire l'objet d'une question de cours.

Algèbre : Applications linéaires

- Définitions : application linéaire, endomorphisme, isomorphisme, espaces isomorphes.
Note aux colleurs : le terme d'automorphisme n'est pas dans le programme officiel.
- Notations : $\mathcal{L}(E, G)$, $\mathcal{L}(E)$, $0_{E,G}$ (application nulle), id_E (application identité), f^n (composée de f n fois).
- Propriétés : **image du vecteur nul par une application linéaire, combinaison linéaire de deux applications linéaires est une application linéaire, composée de deux applications linéaires, si f est un isomorphisme alors f^{-1} est aussi un isomorphisme**, formule du binôme pour les endomorphismes.
- Éléments caractéristiques : image (**c'est un sous-espace vectoriel de G** , l'image est engendré par l'image d'une base de E , lien avec la surjectivité), noyau (**c'est un sous-espace vectoriel de E , lien avec l'injectivité**), rang (définition et théorème du rang).
- Isomorphismes en dimension finie : **caractérisation par le fait que l'image d'une base est une base**, deux espaces isomorphes ont la même dimension, lorsque E et G sont de dimension finie et de même dimension il y a équivalence entre injectif, surjectif et bijectif.
- Une application linéaire est déterminée de façon unique par la donnée des images des vecteurs d'une base de l'espace de départ.
- Matrice associée à une application linéaire, utilisation pour calculer l'image d'un vecteur, matrice d'une combinaison linéaire de deux applications linéaires, matrice d'une composée d'applications linéaires, lien entre bijectivité et le caractère inversible de la matrice associée, formule de changement de base pour les endomorphismes, notion de matrices semblables.
- Noyau et image d'une matrice.

À venir : intégrales généralisées