Exercices : Concepts de base des probabilités

Un peu de dénombrement (révisions)

Exercice 1 :

Une urne contient cinq jetons noirs numérotés de 1 à 5, quatre jetons rouges numérotés de 6 à 9 et deux jetons blancs numérotés 10 et 11. On prélève successivement et sans remise trois jetons dans l'urne. Combien y a-t-il de résultats :

1. au total ?
2. comportant trois jetons rouges ?
3. au moins un jeton rouge ?
4. comportant un jeton rouge, puis un noir, puis un blanc ?
5. comportant un jeton de chaque couleur ?
6. comportant un jeton blanc et deux noirs ?
7. dans lesquels le plus grand des numéros obtenus est le troisième ?

Exercice 2 :

Un code d'immeuble est formé d'une suite constituée d'une lettre (A ou B) et de quatre chiffres (de 0 à 9), la lettre étant située à une place quelconque dans la suite.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes contenant la lettre A et deux fois exactement le chiffre 7 ?
3. Ayant oublié le code mais se souvenant que le code commence par la lettre et constatant que les touches 1, 4, 9 et B sont plus usées que les autres, combien de codes doit-on tester pour être sûr d'ouvrir la porte de l'immeuble ?

Exercice 3 :

On extrait simultanément quatre cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent :
   a) deux valets et deux rois ?
   b) exactement un trèfle ?
   c) au moins un trèfle ?
   d) au plus un trèfle ?
   e) exactement un trèfle et exactement un roi ?
   f) exactement deux piques et exactement deux as ?

Événements élémentaires équiprobables (révisions)

Exercice 4 :

Le code d'une carte bancaire est formé de quatre chiffres variant de 0 à 9.
On considère que le choix d'un code pour une carte bancaire se fait au hasard.
Déterminer la probabilité des événements :

1. A « le code est formé de 4 chiffres distincts » ;
2. B « le code contient une paire et une seule » ;
3. C « le code est formé de deux paires distinctes ».

Exercice 5 :

1. Combien y a-t-il de dominos dans un jeu de dominos ?
2. On tire au hasard, sans remise, deux dominos d'un jeu de dominos. Quelle est la probabilité qu'ils soient juxtaposables, c'est-à-dire qu'ils aient un côté commun ?
3. Dans la règle classique, à quatre, chaque joueur reçoit 7 dominos. Quelle est la probabilité pour un joueur d'avoir au moins un domino double dans sa main ?

Manipulation d'événements

Exercice 6 :

1. On considère des événements A, B, C d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{T})$.
   Écrire, uniquement à l'aide des opérations d'ensembles $\cap$, $\cup$ et complémentaire, les événements suivants :
   a) les événements A et B sont réalisés mais pas C ;
   b) l'un au moins des événements A, B, C est réalisé ;
   c) un et un seul des événements A, B, C est réalisé ;
   d) au plus un des événements A, B, C est réalisé ;
   e) au moins deux des événements A, B, C sont réalisés.
2. On considère maintenant $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{T})$.
   Écrire, uniquement à l'aide des opérations d'ensembles $\cap$, $\cup$ et complémentaire, les événements A « l'un au moins des événement $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réalisé » et B « aucun des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est réalisé ».

Exercice 7 :

1. On considère une expérience aléatoire dont l'issue est un entier naturel. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n l'événement « le résultat de l'expérience est l'entier n ».
   Décrire, à l'aide des événements $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les événements suivants :
   a) A « obtenir un entier supérieur ou égal à 10 » ;
   b) B « obtenir un multiple de 3 » ;
2. On effectue maintenant 5 expériences, dont l'issue est un entier naturel, successivement et dans des conditions identiques. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1;5]\!]$, $E_{k,n}$ l'événement « le résultat de l'expérience numéro k est l'entier n ».
   Décrire, à l'aide des événements $E_{k,n}$, l'événement C « obtenir une suite croissante de 5 entiers consécutifs ».

Indépendance d'événements

Exercice 8 :

Une boite contient deux jetons : un noir et un rouge.

On tire n fois un jeton dans cette boite en le remettant après avoir noté sa couleur. On note A_n l'événement « on obtient des jetons des deux couleurs au cours des n tirages » et B_n l'événement « on obtient au plus un jeton noir ».

On notera, de plus, R_i (resp. N_i) l'événement « obtenir un jeton rouge (resp. noir) au $i^{\text{ème}}$ tirage ».

1. Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
2. A_n et B_n sont-ils indépendants si $n = 2$?
3. Même question si $n = 3$.

Calculs de probabilités et informatique

Exercice 9 :

Dans une usine, on fabrique des composants électroniques sur trois machines. Les machines M_1, M_2 et M_3 produisent respectivement 50%, 30% et 20% des composants.

On estime dans l'usine que

- 2% des composants fabriqués par la machine M_1 sont défectueux,
- 3% des composants fabriqués par la machine M_2 sont défectueux,
- 5% des composants fabriqués par la machine M_3 sont défectueux.

On introduit les notations suivantes :

- pour $i \in \{1, 2, 3\}$, M_i est l'événement « le composant pris au hasard à la sortie de l'usine est produit par la machine M_i » ;
- D est l'événement « le composant pris au hasard à la sortie de l'usine est défectueux ».

1. a) Écrire une fonction Python `simulation()` qui simule le fait de prendre un composant au hasard à la sortie de l'usine et qui renvoie 1 si l'objet est défectueux et 0 s'il n'est pas défectueux.
   b) Écrire un script Python qui, lorsqu'on l'exécute, calcule et affiche une estimation de la probabilité de l'événement D.
2. Quelle est la probabilité qu'un composant pris au hasard à la sortie de l'usine soit défectueux ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un composant défectueux provenant de M_1 ? Les événements « le composant est défectueux » et « le composant provient de M_1 » sont-ils indépendants ?
4. Un composant est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne de M_2 ?

Exercice 10 :

Au moment où chaque compagnie possède un tiers du marché de téléphonie mobile, les trois opérateurs A, B et C décident de mettre sur le marché un nouveau type de forfait annuel. À la fin de chaque année qui suit, l'évolution des parts de marché se fait de la façon suivante :

- les clients de la compagnie A se répartissent indifféremment entre A, B et C l'année suivante ;
- les clients de la compagnie B restent toujours fidèles à cette compagnie ;
- les clients de la compagnie C seront l'année suivante clients de A avec une probabilité $\dfrac{1}{12}$, de B avec une probabilité $\dfrac{7}{12}$ et de C avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n (resp. B_n et C_n) l'événement « être abonné à la compagnie A (resp. B et C) la $n^{\text{ème}}$ année ».

On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Quelles sont les valeurs de a_0, b_0 et c_0 ?
2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer a_{n+1} à l'aide de a_n, b_n et c_n. *Le résultat sera bien justifié*
   b) Sans justification, exprimer b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 puis exprimer le terme général de ces suites en fonction de n.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $b_{n+1} - b_n$ en fonction de n puis en déduire une expression de b_n en fonction de n.
5. Déterminer les limites des trois suites.

Exercice 11 :

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\{n\}) = \dfrac{n^2+1}{3^{n+1}}$.

1. Montrer que $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), P)$ est un espace probabilisé.
2. Calculer la probabilité de l'événement I : « obtenir un entier impair ».

Exercice 12 :

On dispose d'un dé équilibré et de deux urnes. L'urne U_1 contient deux jetons blancs et un jeton rouge. L'urne U_2 contient un jeton blanc et deux jetons rouges.

On lance le dé jusqu'à obtenir pour la première fois un six. Si le numéro du lancer pour lequel on a obtenu le premier six est pair on tire au hasard un jeton dans l'urne U_1 sinon on tire un jeton dans l'urne U_2.

On note A_n l'événement « obtenir un six pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ lancer », S_k l'événement « obtenir six au $k^{\text{ème}}$ lancer », et B l'événement « obtenir un jeton blanc ».

Nous allons utiliser deux méthodes pour calculer $P(B)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité de l'événement A_n.
2. Méthode 1 :
   a) Montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'événements.
   b) En déduire la valeur de $P(B)$.
3. Méthode 2 :
   a) Exprimer l'événement D « le premier six a été obtenu à un numéro de lancer pair » à l'aide de certains des événements de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   En déduire la valeur de $P(D)$.
   b) Calculer la probabilité de l'événement E « le premier six a été obtenu à un numéro de lancer impair ».
   c) En déduire la valeur de $P(B)$.

Pour aller plus loin....

Exercice 13 :

On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » est p ($p \in]0;1[$) et la probabilité d'obtenir « face » est $q = 1 - p$.

1. Soit A_n l'événement « la séquence pile-face apparait pour la première fois aux lancers $(n-1)$ et n ». Calculer $P(A_n)$.
2. Quelle est la probabilité de l'événement A : « la séquence pile-face apparait au moins une fois » ?
3. Soit B l'événement « la séquence pile-pile apparait sans qu'il n'y ait eu de séquence pile-face auparavant ». Calculer $P(B)$.

Exercice 14 :

On considère une suite d'épreuves de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$.
On appelle doublet le fait d'obtenir deux succès à la suite.
Soit A_n l'événement « obtenir le premier doublet au rang n ». On pose $P(A_n) = p_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+3} = p^2(1-p)\left(1 - \sum_{k=2}^{n} p_k\right)$.
2. En déduire une relation entre p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1} et p_n. Calculer p_4, p_5, p_6, p_7.

Exercice 15 :

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'événements. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Correction

Correction de l'exercice 1 :

1. total : $11 \times 10 \times 9 = 990$.
2. trois jetons rouges : $4 \times 3 \times 2 = 24$.
3. au moins un jeton rouge : total- aucun jeton rouge soit $990 - 7 \times 6 \times 5 = 780$.
4. rouge, noir, blanc : $4 \times 5 \times 2 = 40$.
5. un de chaque couleur : Pour chaque ordre ((r,n,b) ou (r,b,n) ou (n,r,b)....) il y a 40 résultats possibles. Comme il y a 6 arrangements possibles pour ces trois couleurs on obtient $6 \times 40 = 240$ résultats comportant les trois couleurs.
6. un blanc et deux noirs : Il y a $2 \times 5 \times 4 = 40$ résultats pour chaque ordre (b,n,n) ou (n,b,n) ou (n,n,b) et il y a trois ordres possibles donc on a 120 résultats comportant un jeton blanc et deux noirs.
7. le dernier est le plus grand numéro : on choisit trois nombres distincts dans $\{1, \ldots, 11\}$ ($\binom{11}{3}$ façons de faire) puis on sélectionne le plus grand (1 façon de faire) et enfin on place les deux nombres restants dans les deux premières places (2 façons de faire).

   Il y a donc $\binom{11}{3} \times 1 \times 2 = 330$ résultats où le plus grand des trois numéros est le dernier.

Correction de l'exercice 2 :

1. On choisit une liste ordonnée de quatre chiffres (10^4 façons de faire) puis une lettre (2 choix possibles) puis on positionne la lettre (5 façons de faire). Au total $10^4 \times 2 \times 5 = 10^5$ codes possibles.
2. 5 positions possibles pour la lettre A, $\binom{4}{2}$ positions possibles pour les deux 7 et 9^2 choix possibles pour les deux chiffres manquants.

   Au total $5 \times 6 \times 81 = 2430$ codes avec la lettre A et exactement deux fois le chiffre 7.
3. La lettre semble donc être la lettre B et on se souvient qu'il faut la placer au début.

   Ensuite, il faut donc utiliser les chiffres 1, 4 et 9 et un des chiffres se répète.

   On a trois choix pour le chiffre qui se répète. Une fois ce choix fait il faut former toutes les combinaisons possibles avec ces 4 chiffres sachant que deux des 4 chiffres sont identiques. Il suffit de positionner les deux chiffres uniques parmi les 4 positions possibles ($4 \times 3 = 12$ positions possibles) puis dans les cases restantes on met le double (une seule façon de faire).

   On a donc $3 \times 12 = 36$ essais au maximum à effectuer.

Correction de l'exercice 3 :

1. $\binom{32}{4}$
2. a) $\binom{4}{2} = 6$ choix pour les valets et idem pour les rois. Donc 36 mains possibles.

   b) 8 choix pour le trêfles et $\binom{24}{3}$ choix pour les 3 autres cartes qui ne sont pas des trêfles. Donc au total $8 \times \binom{24}{3}$ mains possibles.

   c) total-aucun trêfle soit $\binom{32}{4} - \binom{24}{4}$.

   d) aucun trêfle ou exactement un trêfle donc $\binom{24}{4} + 8 \times \binom{24}{3}$.

   e) Il faut distinguer la situation avec le roi de trêfle. Dans ce cas il faut que les trois autres cartes ne soient ni des rois ni des trêfles. Il y a donc $\binom{21}{3}$ possibilités.

   Si le roi n'est pas le roi de trêfle alors on a trois choix pour le roi, 7 choix pour le trêfle et $\binom{21}{2}$ choix pour les deux autres cartes.

   Il y a donc $\binom{21}{3} + 21\binom{21}{2} = 5740$ mains contenant exactement un roi et un trêfle.

   f) Encore une fois se pose la question de l'as de pique.

   Sans l'as de pique : il faut choisir 2 as parmi les 3 autres et 2 piques parmi les 7 qui ne sont pas l'as de pique.

   Avec l'as de pique : il faut choisir un autre as (trois choix), un autre pique (7 choix), et une carte qui n'est ni un as ni un pique (21 choix).

   $\binom{3}{2} \times \binom{7}{2} + 3 \times 7 \times 21 = 504$

Correction de l'exercice 4 :

Dans cette expérience l'univers Ω est l'ensemble de tous les codes de carte possible. On a $\text{card}(\Omega) = 10^4$. Tous les codes sont équiprobables.

1. $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{10^4} = \dfrac{504}{1000}$
2. $P(B) = \dfrac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)}$.

   Pour former un code avec une seule paire il faut choisir le nombre qui sera en double (10 possibilités) puis choisir deux autres nombres distincts entre eux et distincts de la paire (9×8 possibilités) et enfin prendre en compte les 6 positions possibles de la paire. On a donc $\text{card}(B) = 10 \times 9 \times 8 \times 6$.

   Ainsi, $P(B) = \dfrac{432}{1000}$.
3. Pour former un code avec deux paires il faut choisir deux nombres distincts ($\dbinom{10}{2} = 45$ choix) puis il y a 6 positions possibles pour ces deux paires.

   Donc $P(C) = \dfrac{45 \times 6}{10^4} = \dfrac{27}{1000}$.

Correction de l'exercice 5 :

1. Dominos qui ne sont pas des doubles $\dbinom{7}{2} = 21$.

   Et il y a 7 doubles.

   28 dominos en tout.
2. Il y a $\dbinom{28}{2} = 378$ façons de choisir deux dominos au hasard.

   Pour un numéro donné il y a $\dbinom{7}{2}$ dominos qui sont compatibles.

   Donc $7 \times \dbinom{7}{2} = 147$ tirages de dominos compatibles.

   Si on note A l'événement « obtenir deux dominos compatibles » on a donc $P(A) = \dfrac{147}{378} = \dfrac{7}{18}$.
3. Notons B l'événement « avoir un double dans sa main ».

   Il y a $\dbinom{28}{7}$ mains possibles.

   Il y a de plus $\dbinom{21}{7}$ qui ne contiennent aucun double.

   Donc $P(B) = 1 - \dfrac{\binom{21}{7}}{\binom{28}{7}} \approx 0,902$.