Correction du devoir maison n$^{\text{o}}$ 10

Sujet Agro-véto

1. a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant dont l'équation caractéristique associée est $x^2 - 4x + 5 = 0$.
Les solutions de cette équation sont $2 \pm \mathrm{i}$ donc, d'après notre cours :
$\boxed{\mathscr{S}_H = \{x \mapsto \mathrm{e}^{2x}(A\cos(x) + B\sin(x))/(A, B) \in \mathbb{R}^2\}.}$

   b) Une solution particulière de l'équation $y'' - 4y' + 5y = 2$ est $y_1 : x \mapsto \dfrac{2}{5}$.
On cherche une solution particulière de $(E') : y'' - 4y' + 5y = -\mathrm{e}^{2x}$ sous la forme $y_0 : x \mapsto c\mathrm{e}^{2x}$.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x) = 2c\mathrm{e}^{2x}$ et $y_0''(x) = 4c\mathrm{e}^{2x}$. Donc
$$\begin{aligned} y_0 \text{ est solution de } (E') &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 4c\mathrm{e}^{2x} - 8c\mathrm{e}^{2x} + 5c\mathrm{e}^{2x} = -\mathrm{e}^{2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ c = -1. \end{aligned}$$
$x \mapsto -\mathrm{e}^{2x}$ est une solution particulière de (E').
D'après le principe de superposition, $x \mapsto \dfrac{2}{5} - \mathrm{e}^{2x}$ est une solution particulière de (E).
D'après le théorème de structure pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, on a
$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{x \mapsto \mathrm{e}^{2x}(A\cos(x) + B\sin(x)) + \frac{2}{5} - \mathrm{e}^{2x}/(A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

2. a) On pose, pour tout $t \in [0; x]$:
$$\begin{array}{ll} u(t) = \cos(t) & u'(t) = -\sin(t) \\ v'(t) = \mathrm{e}^{2t} & v(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}. \end{array}$$
Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; x]$, d'après le théorème d'intégration par parties :
$$\begin{aligned} C(x) &= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\cos(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\sin(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x}\cos(x) - 1}{2} + \frac{1}{2}S(x). \end{aligned}$$
On pose, pour tout $t \in [0; x]$:
$$\begin{array}{ll} u_1(t) = \sin(t) & u_1'(t) = \cos(t) \\ v'(t) = \mathrm{e}^{2t} & v(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}. \end{array}$$
Les fonctions u_1 et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; x]$, d'après le théorème d'intégration par parties :
$$\begin{aligned} C(x) &= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\sin(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\cos(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x}\sin(x)}{2} - \frac{1}{2}C(x). \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ C(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}\cos(x) - 1}{2} + \frac{1}{2}S(x) \text{ et } S(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}\sin(x)}{2} - \frac{1}{2}C(x).}$$

   b) D'après la question précédente :
$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{\mathrm{e}^{2x}\cos(x) - 1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}\sin(x)}{2} - \frac{1}{2}C(x)\right) \\ &= \frac{2\mathrm{e}^{2x}\cos(x) - 2 + \mathrm{e}^{2x}\sin(x)}{4} - \frac{1}{4}C(x) \\ \Rightarrow \frac{5}{4}C(x) &= \frac{2\mathrm{e}^{2x}\cos(x) - 2 + \mathrm{e}^{2x}\sin(x)}{4} \\ \Rightarrow C(x) &= \frac{2\mathrm{e}^{2x}\cos(x) - 2 + \mathrm{e}^{2x}\sin(x)}{5} \end{aligned}$$

De même, $S(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}\sin(x) - \mathrm{e}^{2x}\cos(x) + 1}{5}$.

$\boxed{\text{Les fonctions } C \text{ et } S \text{ sont des primitives respectives de } x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\cos(x) \text{ et } x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\sin(x).}$

On peut supprimer les constantes additives si on le souhaite !

3. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{2t}\cos(t)$ est continue sur $[0;x]$ donc, d'après le théorème des sommes de Riemann :

$$\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2kx/n}\cos\left(\frac{kx}{n}\right).$$

On utilise ce résultat pour calculer une valeur approchée de l'intégrale demandée :

```
import math as m

def intC(x,nb_pas):
    S=0
    for k in range(nb_pas-1):
        S+=x/nb_pas*m.exp(2*k*x/nb_pas)*m.cos(k-x/nb_pas)
    return S
```

4. Par définition $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ donc $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de F.
Montrons que cette famille est libre. On cherche tous les réels a, b, c et d tels que :

$$\begin{aligned}
& af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0 \\
\Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \quad af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) + df_4(x) = 0 \\
\Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \quad a + b\mathrm{e}^{2x} + c\mathrm{e}^{2x}\cos(x) + d\mathrm{e}^{2x}\sin(x) = 0 \\
\Rightarrow & \begin{cases} a+b+c=0 & \text{pour } x=0 \\ a+b\mathrm{e}^{\pi}+d\mathrm{e}^{\pi}=0 & \text{pour } x=\dfrac{\pi}{2} \\ a+b\mathrm{e}^{2\pi}-c\mathrm{e}^{2\pi}=0 & \text{pour } x=\pi \\ a=0 & \text{en faisant tendre } x \text{ vers } -\infty \end{cases} \\
\Rightarrow & \begin{cases} b+c=0 \\ b+d=0 \\ b-c=0 \\ a=0 \end{cases} \\
\Rightarrow & \begin{cases} b=0 \\ d=0 \\ c=0 \\ a=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc montré que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0 \Rightarrow a = b = c = d = 0$. La réciproque est bien évidemment vraie.
Donc $\mathscr{B}$ est libre et ainsi, $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } F.}$

5. a) Soient $(f,g) \in F^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
u(\lambda f + \mu g) &= (\lambda f + \mu g)' \\
&= \lambda f' + \mu g' && \text{par linéarité de la dérivée} \\
&= \lambda u(f) + \mu u(g).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{u \text{ est linéaire}}$.
À l'oral, il sera accepté de dire « la dérivation étant linéaire, u est bien linéaire. »

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
u(f_1)(x) &= f_1'(x) = 0 \\
u(f_2)(x) &= f_2'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} \\
u(f_3)(x) &= f_3'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}\cos(x) - \mathrm{e}^{2x}\sin(x) \\
u(f_4)(x) &= f_4'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}\sin(x) + \mathrm{e}^{2x}\cos(x).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{u(f_1) = 0,\ u(f_2) = 2f_2,\ u(f_3) = 2f_3 - f_4 \text{ et } u(f_4) = 2f_4 + f_3.}$

c) Dans cette question nous devons juste montrer que u est à valeurs dans F car nous avons déjà montré que u est linéaire.
Soit $f \in F$. Comme $\mathscr{B}$ est une base de F, il existe a, b, c et d tels que $f = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$.
Donc, par linéarité de u,

$$u(f) = au(f_1) + bu(f_2) + cu(f_3) + du(f_4) = 2bf_2 + 2cf_3 - cf_4 + 2df_4 + df_3 \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4) = F.$$

Donc u est bien à valeurs dans F et donc $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } F}$.

D'après les calculs de la question précédente, $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$.

6. On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$. On a

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2b = 0 \\ 2c + d = 1 \\ -c + 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = \dfrac{2}{5} \\ d = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Donc $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Comme A est la matrice représentative de u, on a $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u(f) = f_3$, avec $f = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_5$.

On retrouve le fait que les primitives de f_3 sont $x \mapsto a + \dfrac{2\cos(x) + \sin(x)}{5}\mathrm{e}^{2x}$, $a \in \mathbb{R}$.

7. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

On pose encore $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$. On a

$$(A^2 - 4A + 5I_4)X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 2 \\ b = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{5} \\ b = -1 \end{cases}$$

Donc $(A^2 - 4A + 5I_4)X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -1 \\ c \\ d \end{pmatrix}$, avec $(c, d) \in \mathbb{R}$.

Comme A est la matrice représentative de u, on a $(A^2 - 4A + 5I_4)X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u^2(f) - 4u(f) + 5f = 2f_1 - f_2$,

avec $f = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_5$.

Or $u^2(f) - 4u(f) + 5f = f'' - 4f' + 5f$ et $2f_1 - f_2 : x \mapsto 2 - e^{2x}$.
On retrouve donc ici l'ensemble des solutions de (E) : $\left\{\frac{2}{5}f_1 - f_2 + cf_3 + df_4/(c,d) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Problème ENS

1. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et λ et μ deux réels. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_n(\lambda A + \mu B) &= \mathrm{tr}_n((\lambda A_{i,j} + \mu B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\lambda A_{i,i} + \mu B_{i,i}) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} B_{i,i} \\ &= \lambda \mathrm{tr}_n(A) + \mu \mathrm{tr}_n(B).\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{tr}_n \text{ est une application linéaire.}}$

2. Par définition $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}_n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Or $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 1 donc $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}_n)$ est de dimension 0 ou 1.
Le seul espace vectoriel de dimension 0 est $\{0\}$ et ici, $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}_n) \neq \{0\}$ car par exemple $\mathrm{tr}_n(I_n) = n \neq 0$.
Donc $\boxed{\mathrm{rg}(\mathrm{tr}_n) = \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{tr}_n)) = 1.}$
tr_n est une application linéaire et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie *(hors-programme mais dans un sujet ENS cela peut arriver...)*, donc, d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned}&\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\ker(\mathrm{tr}_n)) + \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{tr}_n)) \\ \Leftrightarrow &\dim(\ker(\mathrm{tr}_n)) = n^2 - 1.\end{aligned}$$

$\boxed{\dim(\ker(\mathrm{tr}_n)) = n^2 - 1.}$

3. a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\mathrm{tr}_2(A) = 0 \Leftrightarrow a + d = 0 \Leftrightarrow d = -a.$$

Donc $\ker(\mathrm{tr}_2) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} /(a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\ker(\mathrm{tr}_n)$.
On peut facilement montrer que cette famille est libre (*je vous laisse le faire*).
Donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \ker(\mathrm{tr}_n).}$

b) $D_2(\mathbb{R}) = \{xI_2/x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(I_2)$. $D_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace engendré par une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\boxed{D_2(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$

c) On réalise un raisonnement par analyse-synthèse.
Analyse : on suppose qu'il existe $(A,B) \in \ker(\mathrm{tr}_2) \times D_2(\mathbb{R})$ tel que $M = A + B$.
Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = \lambda I_2$.
De plus, par linéarité de la trace, $\mathrm{tr}_2(M) = \mathrm{tr}_2(A) + \mathrm{tr}_2(B) = 0 + 2\lambda$. Donc $\lambda = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_2(M)$ et par conséquent $A = M - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(M)I_2$.
Synthèse : Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On pose $A = M - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(M)I_2$ et $B = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_2(M)I_2$.
On remarque qu'on a bien $A \in \ker(\mathrm{tr}_2)$ et $B \in D_2(\mathbb{R})$ et $M = A + B$.
Conclusion : Il existe (*synthèse*) bien un unique (*analyse*) couple $(A,B) \in \ker(\mathrm{tr}_2) \times D_2(\mathbb{R})$ tel que $M = A + B$.

d) On a donc $C_2 = (\mathbb{R}) = \{C \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) / \forall B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ CB = BC\}$.
Les matrices de la forme xI_2 commutent bien avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc $D_2(\mathbb{R}) \subset C_2(\mathbb{R})$.
Réciproquement, si $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in C_2(\mathbb{R})$ alors

$$C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = c = 0,$$

et

$$C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c = 0 \text{ et } a = d.$$

Cela prouve que $C \in C_2(\mathbb{R}) \Rightarrow C = aI_2$ et donc $C_2(\mathbb{R}) \subset D_2(\mathbb{R})$.
En conclusion, $\boxed{C_2(\mathbb{R}) = D_2(\mathbb{R}).}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (B_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices à coefficients réels. On note $AB = (C_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $BA = (D_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}_n(AB)) &= \sum_{i=1}^{n} C_{i,i} && \text{définition de la trace} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,i} && \text{définition du produit matriciel} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{k,i} A_{i,k} && \text{échange d'odre de sommation} \\
&= \sum_{k=1}^{n} D_{k,k} && \text{définition du produit matriciel} \\
&= \operatorname{tr}_n(BA) && \text{définition de la trace}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour toute matrice } A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et pour toute matrice } B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \text{ on a } \operatorname{tr}_n(BA) = \operatorname{tr}_n(AB)}$

5. Voir un exemple de votre cours sur les espaces vectoriels.
6. On se donne des entiers $1 \leqslant i, j, k, \ell \leqslant n$.
Par définition du produit matriciel, pour tout $(a, b) \in [\![1; n]\!]^2$

$$\left(E^{i,j} E^{j,k}\right)_{a,b} = \sum_{c=1}^{n} E^{i,j}_{a,c} E^{j,k}_{c,b}.$$

Si, $a \neq i$ ou $b \neq k$, cette somme est une somme de 0 donc est nulle.
Si $a = i$ et $b = k$:

$$\left(E^{i,j} E^{j,k}\right)_{i,k} = \sum_{c=1}^{n} E^{i,j}_{i,c} E^{j,k}_{c,k} = E^{i,j}_{i,j} E^{j,k}_{j,k} = 1.$$

Cela montre donc que $\boxed{E^{i,j} E^{j,k} = E_{i,k}.}$
De même, si $a \neq i$ ou $b \neq \ell$, $\left(E^{i,j} E^{k,\ell}\right)_{a,b} = 0$.
Et $\left(E^{i,j} E^{k,\ell}\right)_{i,\ell} = \sum_{c=1}^{n} E^{i,j}_{i,c} E^{k,\ell}_{c,\ell} = 0$ car on ne peut pas avoir $c = j$ et $c = k$ en même temps $(k \neq j)$.
Donc $\boxed{E^{i,j} E^{k,\ell} = 0.}$

7. a) Supposons que $i \neq j$. D'après la question précédente, en prenant un entier $k \neq j$, on a :

$$\begin{aligned}
f(E^{i,j}) &= f(E^{i,k} E^{k,j}) && \text{question 6.} \\
&= f(E^{k,j} E^{i,k}) && \text{propriété de } f \\
&= f(0) && \text{question 6.} \\
&= 0 && \text{car } f \text{ est une application linéaire.}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Si } i \neq j,\ f(E^{i,j}) = 0.}$

Soit maintenant $i \in [\![1;n]\!]$. Alors, pour tout $k \neq i$ on a

$$\begin{aligned}
f(E^{i,i}) &= f(E^{i,k}E^{k,i}) && \text{question 6.}\\
&= f(E^{k,i}E^{i,k}) && \text{propriété de } f\\
&= f(E^{k,k}) && \text{question 6.}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f(E^{i,i}) \text{ ne dépend pas de } i.}$

b) Soit $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
f(A) &= f\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} A_{i,j}E^{i,j}\right) && \text{question 5}\\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} A_{i,j} f\left(E^{i,j}\right) && f \text{ est linéaire}\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} A_{i,j} f\left(E^{i,j}\right) + \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i= j}} A_{i,j} f\left(E^{i,j}\right)\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} A_{i,j} f\left(E^{i,j}\right) + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} A_{i,i} f\left(E^{i,i}\right)\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} 0 + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} xA_{i,i} && \text{en posant } f(E^{i,i}) = x \text{ d'après question précédente}\\
&= x\sum_{i=1}^{n} A_{i,i}\\
&= x\mathrm{tr}_n(A).
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Sous les hypothèses de l'énoncé il existe un réel } x \text{ tel que } f = x\mathrm{tr}_n\ .}$

8. On réalise un raisonnement par analyse-synthèse.

Analyse :

On se donne $g \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ et on suppose qu'il existe une matrice B telle que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), g(A) = \mathrm{tr}_n(AB)$. On a alors, pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^n$,

$$\begin{aligned}
g(E^{i,j}) &= \mathrm{tr}_n(E^{i,j}B)\\
&= \mathrm{tr}_n\left(E^{i,j}\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} B_{k,\ell}E^{k,\ell}\right)\\
&\qquad \text{décomposition de } B \text{ dans la base de la question 5.}\\
&= \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} B_{k,\ell}\mathrm{tr}_n\left(E^{i,j}E^{k,\ell}\right) && \text{linéarité de } \mathrm{tr}_n\\
&= \sum_{\ell=1}^{n} B_{j,\ell}\mathrm{tr}_n(E^{i,\ell}) && \text{car pour } k\neq j,\ E^{i,j}E^{k,\ell} = 0\\
&= B_{j,i} && \text{car } \mathrm{tr}_n(E^{i,\ell}) = 0 \text{ pour } i \neq \ell.
\end{aligned}$$

On voit donc que les coefficients $B_{i,j}$ de la matrice B sont les valeurs des $g(E^{j,i})$.

Synthèse :

On se donne $g \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. On pose $B = \left(g(E^{i,j})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
g(A) &= g\left(\sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} A_{k,\ell} E^{k,\ell}\right) \\
&\qquad \text{décomposition de } A \text{ dans la base de la question 5.} \\
&= \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} A_{k,\ell}\, g(E^{k,\ell}) && \text{linéarité de } g \\
&= \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} A_{k,\ell} B^{\ell,k} && \text{définition de } B \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{n} A_{k,\ell} B_{\ell,k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (AB)_{k,k} \\
&= \operatorname{tr}_n(AB).
\end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> Si $g \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ alors $\boxed{\text{il existe une matrice } B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } g(A) = \operatorname{Tr}_n(AB) \text{ pour toute matrice } A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

9. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\operatorname{tr}_2(ABC) = \operatorname{tr}_2\left(\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2,$$

$$\text{et } \operatorname{tr}_2(ACB) = \operatorname{tr}_2\left(\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 10.$$

Donc $\boxed{\text{on a pas toujours } \operatorname{tr}_n(ABC) \neq \operatorname{tr}_n(ACB).}$