Banque Agro-véto 2019 : Méthodes de calcul et raisonnement

Durée : 2 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Exercice :

On considère l'expérience suivante : on effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. On suppose les lancers indépendants.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on notera F_n l'événement « au n-ème lancer on obtient un face ».

On considère la variable aléatoire T égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier face.

1. Donner la loi de T, son espérance et sa variance.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(T > n)$.
3. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Comparer $P_{[T>n]}(T > n + m)$ et $P(T > m)$ et donner une interprétation.

On considère la variable aléatoire S égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier double face, c'est-à-dire deux faces consécutifs. On a donc $S \geqslant 2$ et S est égale à 3 si, et seulement si, on a obtenu pile suivi de deux faces aux trois premiers lancers.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = P(S = n)$ et $q_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k$.

4. Déterminer p_1, p_2, p_3 et p_4 puis q_1, q_2, q_3 et q_4.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer la probabilité de l'événement $[S > n]$ en fonction de q_n.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \in [0; 1]$ puis que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $p_{n+3} = \dfrac{q_n}{8}$ puis que $q_{n+3} = q_{n+2} - \dfrac{q_n}{8}$.
8. En déduire la limite de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en donner une interprétation.

On dit que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifier une relation de récurrence linéaire d'ordre 3.

Dans notre cas, on peut se ramener à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

9. Démontrer que pour tout entier n non nul, on a $q_{n+2} = \dfrac{q_{n+1}}{2} + \dfrac{q_n}{4}$.
10. Déterminer les racines du polynôme $X^2 - \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{4}$.
    On les notera r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$.
11. Justifier qu'il existe des réels A et B tels que : $\begin{cases} Ar_1 + Br_2 = q_1 \\ Ar_1^2 + Br_2^2 = q_2 \end{cases}$.
12. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $q_n = Ar_1^n + Br_2^n$.
13. Donner une équivalent de q_n quand n tend vers $+\infty$.
    Cet équivalent pourra faire intervenir A, B, r_1, r_2 et n.

Toutes les suites récurrentes linéaires d'ordre 3 ne se traitent pas aussi facilement.

On se propose d'en étudier deux exemples dans le problème qui suit.

Problème :

Pour toute matrice M, on notera ${}^tM$ sa transposée.

On considère le produit scalaire usuel sur $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\langle X|\, Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \qquad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Comme le produit matriciel ${}^tXY$ est égal à la matrice de taille 1×1 :

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3),$$

on identifiera matrice de $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et réel, en notant $\langle X|\, Y\rangle = {}^tXY$.

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est **stable** par la matrice A si, et seulement si :

$$\forall X \in F, \qquad AX \in F.$$

On rappelle que l'on appelle droite vectorielle tout espace vectoriel de dimension 1 et plan vectoriel tout espace vectoriel de dimension 2.

On pourra admettre les résultats des parties I et IV et les utiliser dans la partie V.

I. Contexte

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère une suite u telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n.$$

1. Montrer que, pour tout entier n, on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Par convention $A^0 = I_3$.

II. Premier exemple

On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Prouver que la matrice A est diagonalisable.
   On pourra remarquer que le polynôme $X^3 - 2X^2 - X + 2$ possède 1 comme racine et le factoriser par $X - 1$.
3. Prouver qu'il existe trois matrices R_1, R_2 et R_3 de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que pour tout entier n, on ait $A^n = R_1 + (-1)^n R_2 + 2^n R_3$.
   On ne demande pas de calculer explicitement des matrices.
4. Soit u une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

   Prouver qu'il existe des constantes α, β et γ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma(-1)^n.$$

   On ne demande pas d'expliciter les constantes α, β et γ.

III. Second exemple

On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. La matrice A est-elle diagonalisable ? *La réponse sera justifiée.*

6. On pose $U = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la droite vectorielle D engendrée par le vecteur U est stable par A.
7. On pose $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   a) Prouver que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs V et AV est un plan vectoriel. On le notera P.
   b) Prouver que le vecteur A^2V appartient au plan P.
   c) En déduire que le plan P est stable par la matrice A.

IV. Résultats sur les droites et plans stables par une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ quelconque.

8. Soit D une droite vectorielle de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dirigée par un vecteur U non nul.
   Prouver que la droite D est stable par la matrice A si, et seulement si, U est un vecteur propre de la matrice A.
9. Soit P un plan vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On considère une base (X_1, X_2) de P et X_3 un vecteur non nul orthogonal à P.
   a) Prouver que le plan P est stable par la matrice A si, et seulement si, les vecteurs AX_1 et AX_2 appartiennent à P.
   b) Montrer que le vecteur AX_1 appartient au plan P si, et seulement si, les vecteurs X_1 et ${}^tAX_3$ sont orthogonaux.
   On utilisera la notation matricielle du produit scalaire usuel sur $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donnée en préambule $\langle X | Y \rangle = {}^tXY$.
   c) En déduire que le plan P est stable par la matrice A si, et seulement si, le vecteur X_3 est un vecteur propre de la matrice ${}^tA$.

V. Fin du second exemple

On suppose de nouveau dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Déterminer les droites vectorielles stables par la matrice A.
11. On admet que les valeurs propres de ${}^tA$ sont 1 et 2.
    Déterminer les équations des plans vectoriels stables par la matrice A.
12. En déduire une base (U_1, U_2, U_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que :
    — le vecteur U_1 soit un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 2,
    — la droite engendrée par le vecteur U_2 soit stable par la matrice A,
    — le plan P engendré par les vecteurs U_2 et U_3 soit stable par la matrice A.
13. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.
    On considère la base $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ telle que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, U_i est la matrice des coordonnées de u_i dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
    a) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
    b) En déduire que la matrice A est semblable à une matrice de la forme
    $$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \delta \in \mathbb{R}.$$
    c) Déterminer B^n pour toute entier naturel n.
14. En déduire que si une suite u vérifie :
    $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n,$$
    alors il existe des constantes α, β et γ telles que :
    $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma n.$$
    On ne demande pas d'expliciter les constantes α, β et γ.