

Programme de colle de la semaine n° 17

2 au 6 février 2026

La démonstration des propriétés en **gras** pourra faire l'objet d'une question de cours.

Probabilités : Variables aléatoires réelles à densité

- Notion de densité de probabilité.
- Définition de la notion de variable à densité.
- Caractérisation des variables à densité par l'intermédiaire de la fonction de répartition.
- Toute densité de probabilité est la densité d'une VAR à densité.
- **Pour une variable à densité $P(X = a) = 0$, et $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(t) dt$.**
- Espérance d'une variable à densité : définition, linéarité, théorème de transfert.
- Existence de l'espérance pour une VAR à densité nulle en dehors d'un segment.
- Moment d'ordre r , variance.
- Lois usuelles : loi uniforme (densité, **fonction de répartition**, **espérance**, **variance**), loi exponentielle (densité, **fonction de répartition**, **espérance**, **variance**).
- Loi normale centrée réduite : densité, fonction de répartition noté Φ , $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, **$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$** , **espérance** et variance.
- Loi normale de Laplace-Gauss : densité, espérance, variance, si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et réciproquement.
- Exemples de fonctions d'une variable à densité : méthode pour déterminer la loi de $Y = g(X)$ lorsque X est une variable à densité donnée.
- Somme de deux variables à densité indépendantes : une densité de $Z = X + Y$ est le produit de convolution d'une densité de X et une densité de Y . **Attention la formule du produit de convolution doit toujours être rappelée aux étudiants.**
- Somme de deux lois normales indépendantes et généralisation au cas de n lois normales indépendantes (**on pourra demander en démonstration le cas de la somme de deux VAR indépendantes suivant une loi normale centrée réduite**).
- Simulation en Python des lois usuelles.

Algèbre : Réduction des endomorphismes et des matrices

- Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres : définitions et plusieurs caractérisations (en passant par le noyau, le caractère injectif ou inversible,...)

À venir : suite de la réduction