

INTERROGATION ÉCRITE N° 1

2-3 SEPTEMBRE 2025

ÉNONCER DES DÉFINITIONS OU DES THÉORÈMES :

1. Définir ce qu'est une fonction dérivable en un point a :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point et contenant a .

On dit que f est dérivable en a si, et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.

2. Énoncer le théorème des accroissements finis :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.

Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

CONNAITRE SES FORMULES :

1. Compléter les équivalents usuels suivants :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x \quad \cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

2. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

SIMPLIFIER DES FRACTIONS :

1. Simplifier au maximum la fraction suivante : $A = \frac{12^2 \times 15^4 \times 121^{-2}}{25^2 \times 18^4 \times 99^{-3}}$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{(3 \times 2^2)^2 \times (3 \times 5)^4 \times (11^2)^{-2}}{(5^2)^2 \times (3^2 \times 2)^4 \times (3^2 \times 11)^{-3}} \\ &= \frac{3^2 \times 2^4 \times 3^4 \times 5^4 \times 11^{-4}}{5^4 \times 3^8 \times 2^4 \times 3^{-6} \times 11^{-3}} \\ &= 3^4 \times 11^{-1} = \frac{81}{11}. \end{aligned}$$

2. Écrire la fraction suivante sans racine carrée au dénominateur : $B = \frac{1 - \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$.

$$\begin{aligned} B &= \frac{(1 - \sqrt{3} + \sqrt{5}) \times (\sqrt{2} + \sqrt{5})}{(\sqrt{2} - \sqrt{5}) \times (\sqrt{2} + \sqrt{5})} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{6} - \sqrt{15} + \sqrt{10} + 5}{2 - 5} \\ &= -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{6} - \sqrt{15} + \sqrt{10} + 5}{3}. \end{aligned}$$

CALCULER DES DÉRIVÉES :

Déterminer la valeur de $f'(x)$ pour x appartenant au domaine indiqué et f définie ci-dessous :

(On ne cherchera pas à justifier que f est dérivable sur le domaine indiqué)

1. $x \in \left] -\frac{3}{4}; +\infty \right[$ et $f(x) = \ln\left(\frac{3+4x}{x^2+2}\right)$:

$$f'(x) = \frac{\frac{4(x^2+2) - (3+4x) \times 2x}{(x^2+2)^2}}{\frac{3+4x}{x^2+2}} = \frac{-4x^2 - 6x + 8}{(x^2+2)(3+4x)}.$$

2. $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sqrt{x^4+2}$:

$$f'(x) = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+2}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2}}.$$

3. $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\setminus \{0\}$ et $f(x) = \ln(|\tan(x)|)$:

$$f'(x) = \frac{1 + \tan^2(x)}{\tan(x)} = \frac{1}{\cos^2(x) \tan(x)}.$$

CALCULER DES LIMITES :

Donner, en justifiant lorsque c'est nécessaire, la valeur des limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-4x} + x^2 \ln(x) - x^4 e^x}{x^5 + x^3 e^{-x} - \ln(x)}$:

$$\frac{e^{-4x} + x^2 \ln(x) - x^4 e^x}{x^5 + x^3 e^{-x} - \ln(x)} = \frac{x^4 e^x}{x^5} \times \frac{\frac{e^{-5x}}{x^4} + \frac{\ln(x)}{x^2 e^x} - 1}{1 + \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^5}}.$$

Grâce aux règles des croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 e^x}{x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-5x}}{x^4} + \frac{\ln(x)}{x^2 e^x} - 1 = -1$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^5} = 1.$$

Donc, par opération sur les limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-4x} + x^2 \ln(x) - x^4 e^x}{x^5 + x^3 e^{-x} - \ln(x)} = -\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^2} + \sin(3x)e^{2x}$:

La fonction $x \mapsto \cos^2(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Donc, par encadrement de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^2} = 0$.

La fonction $x \mapsto \sin(3x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$.

Donc, par encadrement de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(3x)e^{2x} = 0$.

Par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^2} + \sin(3x)e^{2x} = 0$.