

INTERROGATION N° 9

17 NOVEMBRE 2025

QUESTION 1 :

Définir ce qu'est la fonction de répartition d'une VAR X .

On appelle **fonction de répartition de X** l'application $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = P(X \leq t).$$

QUESTION 2 :

Énoncer la propriété de croissance de l'espérance pour les VAR.

Si X et Y sont deux variables aléatoires admettant une espérance et telles que $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$.

Alors $E(X) \leq E(Y)$.

QUESTION 3 :

Définir ce qu'est l'espérance d'une VAR **discrète**.

Soit X une VAR discrète.

On dit que **X admet une espérance**, ou que **l'espérance de X existe**, si, et seulement si, la série $\sum_{x \in X(\omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente.

On appelle alors **espérance de X** , le réel $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.

QUESTION 4 :

Énoncer la formule de transfert pour une VAR **discrète**.

Soit X une VAR discrète et soit g une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors la variable aléatoire réelle $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$

est absolument convergente et dans ce cas, on a :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x).$$

QUESTION 5 :
Remplir le tableau suivant à l'aide de vos connaissances sur les lois usuelles :

Notation	$X(\Omega)$	$P(X = x)$ avec $x \in X(\Omega)$	Espérance	Variance
$\mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$	$\forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \frac{1}{n}$	$E(X) = \frac{n+1}{2}$	Hors programme
$\mathcal{B}(p)$ ($p \in [0; 1]$)	$X(\Omega) = \{0; 1\}$	$P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$	$E(X) = p$	$V(X) = p(1 - p)$
$\mathcal{B}(n, p)$ ($n \in \mathbb{N}$, $p \in [0; 1]$)	$X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$	$\forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$E(X) = np$	$V(X) = np(1 - p)$
$\mathcal{G}(p)$ ($p \in]0; 1[$)	$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$	$\forall k \in X(\Omega), P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$V(X) = \frac{1 - p}{p^2}$
$\mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda \in]0; +\infty[$)	$X(\Omega) = \mathbb{N}$	$\forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	$E(X) = \lambda$	$V(X) = \lambda$