Banque Agro-véto 2019 Maths
Correction

Exercice :

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, considérons l'épreuve de Bernoulli « au n-ème lancer on obtient un face ». La probabilité de succès est $P(F_n) = \dfrac{1}{2}$.
   Les lancers sont indépendants, les épreuves de Bernoulli considérées sont donc indépendantes. La variable aléatoire T désigne donc le rang du premiers succès dans une succession illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre.
   La variable aléatoire T suit donc une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et ainsi $E(T) = \dfrac{1}{1/2} = 2$ et $V(T) = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$.
2. L'événement $[T > n]$ est réalisé si, et seulement si, les n premiers lancers ont donné pile.
   On a donc $[T > n] = \overline{F_1} \cap \ldots \cap \overline{F_n}$ et, comme les lancers sont indépendants : $P(T > n) = P(\overline{F_1}) \times \ldots \times P(\overline{F_n}) = \dfrac{1}{2^n}$.
   Autre méthode : $[T > n] = \displaystyle\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} [T = k]$.
3. (*on va ici redémontrer la propriété d'invariance temporelle de la loi géométrique*).
$$\begin{aligned} P_{[T>n]}(T > n+m) &= \frac{P([T > n] \cap [T > n+m])}{P(T > n)} = \frac{P(T > n+m)}{P(T > n)} \text{ car } [T > n+m] \subset [T > n] \\ &= \frac{1}{2^{n+m}} \times 2^n = \frac{1}{2^m} = P(T > m). \end{aligned}$$
   On peut dire que la loi géométrique est sans mémoire : le fait d'avoir eu n échecs ne change pas la probabilité d'en avoir encore m ensuite.
4. $p_1 = P(S = 1) = 0$ car il faut au moins deux lancers pour faire un double face.
   $p_2 = P(S = 2) = P(F_1 \cap F_2) = \dfrac{1}{4}$ car les lancers sont indépendants.
   $p_3 = P(S = 3) = P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3) = \dfrac{1}{8}$.
   $p_4 = P(S = 4) = P((F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4)) = P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) + P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4)$, car on a une union d'événements incompatibles.
   Toujours par indépendance des lancers, on obtient $p_4 = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$.
   On en déduit $q_1 = 1$, $q_2 = \dfrac{3}{4}$, $q_3 = \dfrac{5}{8}$ et $q_4 = \dfrac{1}{2}$.
5. $[S > n] = \overline{[S \leqslant n]} = \overline{\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} [S = k]}$.
   Ayant une union d'événements incompatibles deux à deux, on en déduit que
$$P(S > n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(S = k) = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k = q_n.$$
6. Une probabilité étant toujours comprise entre 0 et 1, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \in [0; 1]$.
   De plus, $[S > n+1] \subset [S > n]$ donc $q_{n+1} \leqslant q_n$ et ainsi la suite (q_n) est décroissante.
   La suite (q_n) est donc décroissante et minorée, donc elle est convergente.
7. L'astuce consiste ici à remarquer que $[S = n+3] = [S > n] \cap \overline{F_{n+1}} \cap F_{n+2} \cap F_{n+3}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} p_{n+3} &= P(S>n) \times P_{[S>n]}(\overline{F_{n+1}}) \times P_{[S>n]\cap\overline{F_{n+1}}}(F_{n+2}) \times P_{[S>n]\cap\overline{F_{n+1}}\cap F_{n+2}}(F_{n+3}) \\ &= q_n \times \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Par définition de q_n on a alors :

$$q_{n+3} = q_{n+2} - p_{n+3} = q_{n+2} - \frac{q_n}{8}.$$

8. On a montré que $\lim_{n\to+\infty} q_n = \ell \in [0;1]$.
Par composition de limites on a aussi $\lim_{n\to+\infty} q_{n+3} = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} q_{n+2} = \ell$.
Par propriété d'unicité de la limite, on a donc $\ell = \ell - \frac{\ell}{8}$ et donc $\ell = 0$.
Ainsi $\lim_{n\to+\infty} q_n = 0$ ce qui signifie qu'on est presque certain d'obtenir un double face après un grand nombre de lancers.

9. Dans cette question, l'astuce consiste à distinguer le résultat du premier lancer. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(F_1, \overline{F_1})$ on a

$$\begin{aligned} P(S>n+2) &= P(F_1)P_{F_1}(S>n+2) + P(\overline{F_1})P_{\overline{F_1}}(S>n+2) \\ &= \frac{1}{2}P_{F_1}(S>n+2) + \frac{1}{2}P_{\overline{F_1}}(S>n+2) \end{aligned}$$

Il faut ensuite remarquer que lorsqu'on sait que F_1 est réalisé dire que $[S>n+2]$ revient à dire qu'on a obtenu pile au deuxième lancer et qu'ensuite à partir du 3ème lancer, tout peut se produire, c'est comme si on reprenait l'expérience à 0 et qu'on obtenait l'événement $[S>n]$.
Donc $P_{F_1}(S>n+2) = P(F_2) \times P(S>n)$.
De même, le fait de savoir qu'on a fait pile au premier lancer n'impose aucune contrainte à partir du deuxième lancer et donc c'est comme si on repartait de 0 et qu'on obtenait l'événement $[S>n+1]$. Donc $P_{\overline{F_1}}(S>n+2) = P(S>n+1)$.
En conclusion, on a $P(S>n+2) = \frac{1}{4}P(S>n) + \frac{1}{2}P(S>n+1)$ et donc on a la relation demandée.

10. Les racines sont $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

11. Montrons que le système proposé est de Cramer. Pour cela, il suffit de montrer que la matrice associée à ce système est inversible en calculant son déterminant :

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix} = r_1 r_2^2 - r_1^2 r_2 = r_1 r_2 (r_2 - r_1) = -\frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \neq 0.$$

Il existe donc un unique couple (A, B) solution du système donné.

12. D'après notre cours, on sait qu'il existe λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

En évaluant pour $n=1$ et $n=2$ on trouve que λ et μ sont solution du système de la question 11.
Or on a prouvé que ce système admet une unique solution que nous avons noté (A, B) donc $\lambda = A$ et $\mu = B$.
En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = Ar_1^n + Br_2^n$.

13. On a $\frac{r_1^n}{r_2^n} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \to 0$ car $|r_1| < r_2$ donc $\left|\frac{r_1}{r_2}\right| < 1$.
Ainsi $Ar_1^n = o(Br_2^n)$ et donc $q_n \underset{n\to+\infty}{\sim} Br_2^n$.

Problème :

I. Contexte

1. Notons $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. On a alors :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AX_n.$$

On montre alors par une récurrence rapide (*je vous laisse la faire*) que, pour tout entier n, $X_n = A^n X_0$.
On a bien montré le résultat demandé.

II. Premier exemple

2. Déterminons les valeurs propres de A. On cherche tous les réels λ tels que $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible, c'est-à-dire tels que $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3$. Or on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 2-\lambda & 1 & -2 \end{pmatrix} && \text{permutation circulaire des lignes} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1+2\lambda-\lambda^2 & -2 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_1 \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -2+\lambda+2\lambda^2-\lambda^3 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - (1+2\lambda-\lambda^2)L_2
\end{aligned}$$

Ainsi, λ est une valeur propre de A si, et seulement si, $-2+\lambda+2\lambda^2-\lambda^3 = 0$.
Or $-2+\lambda+2\lambda^2-\lambda^3 = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$.
Donc les valeurs propres de A sont 1, -1 et 2.
A est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admettant exactement trois valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable.

3. D'après la question précédente il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que : $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On peut alors montrer par une récurrence rapide (*à vous de le faire, cf. cours*) que $A^n = PD^nP^{-1}$.

Comme D est une matrice diagonale on a $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ et donc :

$$\begin{aligned}
A^n &= P\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + (-1)^nP\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + 2^nP\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}.
\end{aligned}$$

En posant $R_1 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$, $R_2 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$, et $R_3 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$, on a bien l'écriture demandée avec R_1, R_2 et R_3 matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

4. D'après la question 1. on a $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$.

   Les coefficients de la matrice A^n étant tous de la forme $x + y(-1)^n + z2^n$ d'après la question 3., en effectuant le produit de A^n par $\begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ on obtient une matrice colonne avec des coefficients encore de la forme $\ldots + \ldots (-1)^n + \ldots\ 2^n$ et donc on a bien $u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma(-1)^n$.

   On peut aussi remarquer que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = u_n$ *et donc* $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_3 \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_1 \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ *et* $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_2 \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$.

III. Second exemple

5. De même que dans la question 2. déterminons les valeurs propres de la matrice A de cette partie.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 4-\lambda & -5 & 2 \end{pmatrix} && \text{permutation circulaire des lignes} \\
&= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & -5+4\lambda-\lambda^2 & 2 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - (4-\lambda)L_1 \\
&= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2-5\lambda+4\lambda^2-\lambda^3 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - (-5+4\lambda-\lambda^2)L_2
\end{aligned}$$

   Ainsi, λ est une valeur propre de A si, et seulement si, $2 - 5\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 = 0$.
   Or $2 - 5\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$.
   Donc les valeurs propres de A sont 1 et 2.
   De plus, en reprenant nos calculs de rang, $\mathrm{rg}(A - I_3) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ donc, d'après le théorème du rang $\dim(E_1(A)) = 3 - 2 = 1$.
   Et $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ donc $\dim(E_2(A)) = 1$.
   Ainsi $\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 2 \neq 3$ donc A n'est pas diagonalisable.

6. Soit $X \in D = \mathrm{Vect}(U)$.Il existe donc $\alpha \in R$ tel que $X = \alpha U$.
   On a alors, $AX = \alpha AU = \alpha \times 2U = (2\alpha)U \in D$.
   D est donc stable par A.

7. a) Notons $P = \mathrm{Vect}(V, AV)$. On a $AV = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   On remarque donc que la famille (V, AV) est libre car formée de deux vecteurs visiblement non proportionnels. Par définition la famille (V, AV) est aussi génératrice de P.
   Donc (V, AV) est une base de P, ce qui implique que $\dim(P) = 2$, c'est-à-dire P est un plan vectoriel.

   b) $A^2V = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = -2V + 3AV$. Donc $A^2V \in P$.

c) Soit $X \in P$. Par définition de P il existe α et β deux réels tels que $X = \alpha V + \beta AV$.
On a donc $AX = \alpha AV + \beta A^2 V = -2\beta V + (\alpha + 3\beta)AV$, ce qui implique que $AX \in P$.
P est bien stable par A.

IV. Résultats sur les droites et plans stables par une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

8.
- Supposons que D est stable par A. Comme $U \in D$, on sait donc que $AU \in D = \mathrm{Vect}(U)$. Il existe donc un réel α tel que $AU = \alpha U$. Comme U est supposé non nul, on en déduit que U est un vecteur propre de A.
- Supposons que U est un vecteur propre de A. Alors il existe un réel λ tel que $AU = \lambda U$.
Soit $X \in D = \mathrm{Vect}(U)$. On sait qu'il existe a tel que $X = aU$, donc $AX = aAU = a\lambda U \in D$.
Ainsi, D est stable par A.

9. a)
- Supposons que P est stable par A.
Comme X_1 et X_2 sont des éléments de P, par définition d'un espace stable, on peut dire que AX_1 et AX_2 appartiennent à P.
- Supposons que AX_1 et AX_2 appartiennent à P.
Soit X un élément quelconque de P. Il existe alors α et β des réels tels que $X = \alpha X_1 + \beta X_2$.
On a alors $AX = \alpha AX_1 + \beta AX_2$. Comme P est un sous-espace vectoriel, on en déduit que $AX \in P$.
Ainsi P est stable par A.

b) Comme X_3 est un vecteur non nul normal à P, on sait qu'un vecteur appartient à P si, et seulement s'il est orthogonal à X_3.
Donc
$$AX_1 \in P \Leftrightarrow \langle AX_1 |\, X_3 \rangle = 0 \Leftrightarrow {}^t(AX_1)X_3 = 0 \Leftrightarrow {}^tX_1\, {}^tAX_3 = 0 \Leftrightarrow \langle X_1 |\, {}^tAX_3 \rangle = 0.$$
AX_1 appartient à P si, et seulement si, X_1 est orthogonal à ${}^tAX_3$.

c) On a montré que P est stable par A si, et seulement si AX_1 et AX_2 appartiennent à P.
D'après la question précédente, P est donc stable par A si, et seulement si ${}^tAX_3$ est orthogonal à X_1 et X_2 donc à P.
Or les vecteurs orthogonaux à P sont tous colinéaires à X_3. (*Ceci est un peu à la limite du programme de BCPST...*)
Donc P est stable par A si, et seulement si ${}^tAX_3$ est colinéaire à X_3 ce qui signifie que X_3 est un vecteur propre de ${}^tA$.

V. Fin du second exemple

10. Les droites vectorielles stables sont les droites engendrées par des vecteurs propres de A.
Or $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.
Les droites vectorielles stable sont donc $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

11. Les plans vectoriels stables par A sont les plans normaux aux vecteurs propres de ${}^tA$.
De plus $E_1({}^tA) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\right)$ et $E_1({}^tA) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$.
Les plans stables par A sont donc
$$P_1 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / x - 3y + 2z = 0\right\} \text{ et } P_2 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / x - 2y + z = 0\right\}.$$

12. On choisit $U_1 = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$.

Pour que la droite engendrée par U_2 soit stable par A il faut que U_2 soit un vecteur propre de A. Pour qu'il ne soit pas colinéaire à U_1 il faut que ce soit un vecteur propre associé à la valeur propre 1. On choisit donc $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le plan engendré par U_2 et U_3 doit être un des deux plans déterminés dans la question précédente.

On remarque que U_2 appartient aux deux plans. Il semble donc qu'on puisse choisir l'un ou l'autre. Mais il faut aussi s'assurer que (U_1, U_2, U_3) soit une famille libre donc il ne faut pas que U_3 soit dans un plan qui contienne U_1 et U_2.

On remarque alors que $U_1 \in P_1$ donc il faut choisir U_3 dans P_2.

On prend donc $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Il reste à vérifier que la famille (U_1, U_2, U_3) est bien une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rgMat}_{\mathscr{B}_c}(U_1, U_2, U_3) &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\
&= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\
&= 3
\end{aligned}$$

La famille (U_1, U_2, U_3) est bien une base.

13. On a donc $u_1 = (4, 2, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 0, -1)$.

    a) Par construction des vecteurs de $\mathscr{B}$, on sait que $f(u_1) = 2u_1$, $f(u_2) = u_2$ et après calculs on a $f(u_3) = (2, 1, 0) = u_2 + u_3$.

    Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    b) On pose $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A et B représentent le même endomorphisme f mais dans deux bases différentes. D'après la formule de changement de base A et B sont semblables.

    c) On peut montrer par récurrence que $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. De même que dans la partie II. on peut montrer que $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n X_0$.

    Or $A^n = PB^nP^{-1}$, donc le résultat du calcul de $PB^nP^{-1}X_0$ donne des coefficients de la forme $\alpha 2^n + \beta + \gamma n$, donc u_n est de cette forme.