Devoir maison n$^{\text{o}}$ 4

À rendre le 13 octobre 2025

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois la succession des résultats « Pile, Pile, Face », dans cet ordre.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose F_n : « Obtenir Face au n-ème lancer », et P_n : « Obtenir Pile au n-ème lancer ».

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on pose :

— B_n l'événement défini par : $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$.

— A_n l'événement défini par : « la succession Pile, Pile, Face se produit pour la première fois aux lancers $n-2$, $n-1$ et n ».

— U_n l'événement défini par : « la succession Pile, Pile, Face est apparue au moins une fois au cours des n premiers lancers ».

— $u_n = P(U_n)$.

1. a) Écrire une fonction Python sans argument qui simule les lancers de dés jusqu'à l'apparition de la séquence « Pile, Pile, Face » et qui renvoie sous forme de liste les résultats de tous les lancers réalisés.

   b) Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction Python qui, étant donné un entier n supérieur ou égal à trois, renvoie une valeur approchée de la probabilité de l'événement A_n.

2. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $U_n = \displaystyle\bigcup_{k=3}^{n} B_k$.

3. a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, calculer $P(B_n)$ et justifier rigoureusement que les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.
   Les événements B_n et B_{n+3} sont-ils aussi incompatibles ?

   b) Calculer u_3, u_4 et u_5 et démontrer que : $\forall n \geqslant 3$, $u_{n+3} = u_{n+2} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8}u_n$.

   c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge, et calculer sa limite.

4. On considère maintenant l'événement U défini par $U = \displaystyle\bigcup_{k=3}^{+\infty} B_k$.

   a) Décrire à l'aide d'une phrase en français l'événement U.

   b) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $U_n \subset U$.

   c) En déduire la valeur de $P(U)$.