NOM et Prénom :

Interrogation n° 3

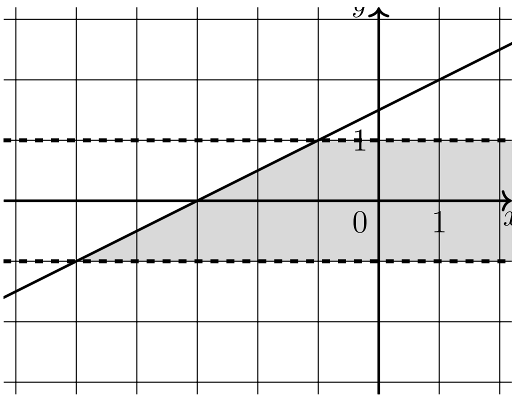
15 septembre 2025

Question 1 :

Donner explicitement (c'est-à-dire sous la forme $\mathscr{D}_f = \{.....\}$) puis représenter le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \ln(1 - y^2) + \exp(\sqrt{3 - 2y + x}).$$

$\mathscr{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 < 1 \text{ et } 3 - 2y + x \geqslant 0\}$.



Question 2 :

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 *(on ne demande pas de justifier le caractère dérivable de la fonction)* de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \sqrt{2x^2 + 1} + x e^{y^2 + x}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}} + (x + 1)e^{y^2 + x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy e^{y^2 + x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{2x^2 + 1}} - \frac{4x}{(2x^2 + 1)^{3/2}} + (x + 2)e^{y^2 + x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x(2y^2 + 1)e^{y^2 + x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2y(x + 1)e^{y^2 + x}.$$

Question 3 :

Énoncer rigoureusement le théorème de Schwarz.

Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur le pavé **ouvert** U alors

$$\forall (a, b) \in U, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b).$$