

Vocabulaire sur les fonctions

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

— « **R barre** » : On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

— **Propriété vraie au voisinage d'un point** :

Soit $a \in \mathbb{R}$, on dit qu'une propriété portant sur f est vraie au voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la propriété est vraie sur $[a - \varepsilon; a + \varepsilon] \cap I$.

On dit qu'une propriété portant sur f est vraie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété est vraie sur $[A; +\infty[\cap I$ (resp. $]-\infty; A] \cap I$).

— **Fonction paire** : On dit que f est une fonction paire sur I si, et seulement si :

- $\forall x \in I, -x \in I$ (on dit que I est symétrique par rapport à 0);
- $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$.

— **Fonction impaire** : On dit que f est une fonction impaire sur I si, et seulement si :

- $\forall x \in I, -x \in I$ (on dit que I est symétrique par rapport à 0);
- $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$.

— **Fonction périodique** : On dit que f est une fonction périodique de période T si, et seulement si :

- f est définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ qui vérifie que pour tout $x \in D, x + T \in D$;
- pour tout $x \in D, f(x + T) = f(x)$.

— **Fonction (strictement) croissante** :

On dit que f est croissante (resp. strictement croissante) sur l'intervalle I si, et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

— **Fonction (strictement) décroissante** :

On dit que f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur l'intervalle I si, et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (\text{resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

— **Sens de variation** : il s'agit de préciser les intervalles où f est croissante et ceux où f est décroissante.

— **Fonction majorée ou minorée, majorant ou minorant** : On dit que f est majorée par M (resp. minorée par m) sur I si, et seulement si,

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq M \quad (\text{resp. } f(x) \geq m).$$

On dit alors que M est un majorant de f ou que m est un minorant de f .

— **Fonction bornée** : On dit que f est bornée sur I si, et seulement si, f est majorée et minorée sur I .

— **Maximum ou minimum global** : On dit que f admet un maximum global (resp. minimum global) sur I s'il existe $x_0 \in I$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

On dit alors que le maximum de f (resp. minimum) est $f(x_0)$ et qu'il est atteint en x_0 .

— **Extremum global** : On dit que f admet un extremum global si, et seulement si, f admet un maximum ou un minimum global.

— **Maximum ou minimum local** : On dit que f admet un maximum local (resp. minimum local) s'il existe $x_0 \in I$ et J un intervalle contenu dans I et contenant un voisinage de x_0 , tels que :

$$\forall x \in J, \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

— **Extremum local** : On dit que f admet un extremum local si, et seulement si, f admet un maximum ou un minimum local.

— **Fonction injective sur I** : On dit que f est injective sur I si, et seulement si,

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad f(x) = f(y) \iff x = y.$$

— **Fonction surjective de I sur J** : On dit que f est surjective de I sur J si, et seulement si,

pour tout $y \in J$ il existe au moins un $x \in I$ tel que $y = f(x)$.

— **Fonction bijective de I sur J** : On dit que f est bijective de I sur J (ou réalise une bijection de I sur J) si, et seulement si, f est une fonction injective sur I et surjective de I sur J .

— **Fonctions équivalentes** : On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si, et seulement si, g n'est pas nulle au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

— **Fonction continue en $a \in I$** : On dit que f est continue en a si, et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

— **Fonction dérivable en $a \in I$** : On dit que f est dérivable en a si, et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$.

— **Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I** : On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si, et seulement si, f est dérivable sur I et sa dérivée f' est continue sur I .

— **Fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) sur I** : On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si, et seulement si, f est k fois dérivable sur I et que sa dérivée $k^{\text{ème}}$ (notée $f^{(k)}$) est continue sur I .

Remarque : être de classe $\mathcal{C}^0$ signifie être continue.

— **Fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I** : On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable.

— **Prolongement par continuité** : On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si, et seulement si, f n'est pas définie en x_0 et possède une limite finie ℓ en x_0 .

On peut alors définir la fonction g par $g(x) = f(x)$ si $x \in \mathcal{D}_f$ et $g(x_0) = \ell$ et cette fonction est continue sur $\mathcal{D}_f \cup \{x_0\}$.

La fonction g est appelée le prolongement par continuité de f à $\mathcal{D}_f \cup \{x_0\}$.

— **Notation $o(x^n)$ ($n \in \mathbb{Z}$)** : On dit qu'une fonction f est **négligeable devant x^n au voisinage de 0 ou de $\pm\infty$** , on note $f = o(x^n)$, si, et seulement si, f est définie au voisinage de 0 ou de $\pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0 \text{ ou } \pm\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0$.

— **Développement limité au voisinage de 0** : On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 si, et seulement s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que, pour tout x au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

— **Développement limité au voisinage de x_0 (*Hors programme*)** : On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 si, et seulement s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que, pour tout x au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

— **Asymptote verticale** : On dit que la droite d'équation $x = k$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de x_0 si, et seulement si, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$.

— **Asymptote horizontale ou oblique** : On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ (a et b étant deux réels fixés) est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $\pm\infty$ si, et seulement si, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

Limites usuelles

$f(x) \backslash x \rightarrow$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(x)$		$-\infty$ (en 0^+)	$+\infty$
e^x	0	1	$+\infty$
$x^r, r > 0$	r entier pair : $+\infty$ r entier impair : $-\infty$	0	$+\infty$

Opérations sur les limites

$\lim_b u$	$\lim_b v$	$\lim_b (u + v)$	$\lim_b (uv)$	$\lim_b \left(\frac{u}{v}\right)$
$\ell \neq 0$	0	ℓ	0	$\pm\infty$ (RS)
0	0	0	0	$?$
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (RS)	0
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$?$	0
$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (RS)	$\pm\infty$ (RS)
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	$?$	$\pm\infty$ (RS)
$+\infty$	$-\infty$	$?$	$-\infty$	$?$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$?$

RS signifie qu'il faut déterminer le signe du résultat grâce à la règle des signes de la multiplication.

Les cases où il y a un ? sont les cases où on ne peut pas donner de résultat général. On appelle ce genre de limite des **formes indéterminées**. C'est au cas par cas qu'il faut trouver la bonne méthode pour arriver à calculer la limite.

Composée de fonctions : Soient b, b', b'' trois éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions telles que f est définie au voisinage de b et g est définie au voisinage de b' . Alors :

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = b' ; \lim_{x \rightarrow b'} g(x) = b'' \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b} g \circ f(x) = b''$$

Les croissances comparées

Lorsqu'on fait appel aux résultats suivants on dit souvent que l'on utilise les « croissances comparées ».

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^{+*})^3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\beta x^\gamma}}{x^\alpha} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha (\ln(x))^\beta = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^{\beta x} = 0.$$

Équivalents à connaître par cœur

- On pourra, en exercice, remplacer les « boîtes » ($\square$) par n'importe quelle expression du moment que la boîte vérifie ce qui est indiqué :

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \implies \quad \text{si } \square \rightarrow 0, \quad e^\square - 1 \underset{\dots}{\sim} \square$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \implies \quad \text{si } \square \rightarrow 0, \quad \ln(1+\square) \underset{\dots}{\sim} \square$$

$$\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1 \quad \implies \quad \text{si } \square \rightarrow 1, \quad \ln(\square) \underset{\dots}{\sim} \square - 1$$

$$\text{pour } a \neq 0, \quad (1+x)^a - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} ax \quad \implies \quad \text{si } \square \rightarrow 0, \quad (1+\square)^a - 1 \underset{\dots}{\sim} a \times \square$$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \implies \quad \text{si } \square \rightarrow 0, \quad \sin(\square) \underset{\dots}{\sim} \square$$

$$\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \quad \implies \quad \text{si } \square \rightarrow 0, \quad \cos(\square) - 1 \underset{\dots}{\sim} -\frac{\square^2}{2}$$

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \implies \quad \text{si } \square \rightarrow 0, \quad \tan(\square) \underset{\dots}{\sim} \square$$

On en déduit, entre autre, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

- Si n et p sont deux entiers tels que $n \geq p$ et si $(a_p, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-p+1}$ avec $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$:

$$a_p x^p + \dots + a_n x^n \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p, \quad a_p x^p + \dots + a_n x^n \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_n x^n.$$

« Toute fonction polynômiale est équivalente à son monôme de plus haut degré en $+\infty$ et $-\infty$ et à son monôme de plus petit degré en 0. »

Développements limités

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n) \text{ et } \frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \text{ et } \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} e^x &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ (a \in \mathbb{R}) \quad (1+x)^a &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\ \cos(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n}) \\ \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

Propriétés importantes

— Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a et si f et g admettent des limites finies en a alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

— Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.

— Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

— Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\ell > 0$ alors il existe un voisinage de a tel pour tout x appartenant à ce voisinage, $f(x) > 0$. (à adapter si $\ell < 0$)

— Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

— Si f admet une limite finie $\ell \neq 0$ en a alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell$.

— Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$.

— Si f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 , alors au voisinage de x_0 , f est équivalente au premier terme non nul de son développement limité.

— Si f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0 , $f(x) = a + b(x - x_0) + o((x - x_0))$ alors f est dérivable en x_0 et $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.

— Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ alors $g(x) + f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

— **Opérations sur les $\sim$** : il est INTERDIT DE SOMMER des équivalents.

(i) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.

(ii) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} j$ alors $fh \underset{a}{\sim} gj$.

(iii) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a alors $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.

(iv) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} j$ et si h et j ne s'annulent pas au voisinage de a alors $\frac{f}{h} \underset{a}{\sim} \frac{g}{j}$.

(v) Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \underset{a}{\sim} g^n$ et $f^{\frac{1}{n}} \underset{a}{\sim} g^{\frac{1}{n}}$.

— Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Théorèmes importants

- **Théorème des bornes atteintes** : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.
Alors f est bornée sur $[a; b]$ et atteint ses bornes.
- **Théorème de la limite monotone** : Soit f une fonction croissante sur $I =]a; b[$.
Alors f admet une limite à droite en a finie (si f est minorée) ou égale à $-\infty$ et f admet une limite à gauche en b finie (si f est majorée) ou égale à $+\infty$.
Résultat à adapter si f est décroissante.
- **Théorème dit « des gendarmes » ou « d'encadrement de limites »** : Soient f, g , et h trois fonctions définies sur le même intervalle I et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que f et h admettent la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en x_0 et que au voisinage de x_0 on a $f \leq g \leq h$.
Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g = \ell$.
- **Théorème des valeurs intermédiaires** : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.
Alors pour tout réel k compris entre les réels $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.
- **Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires** : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a, b]$.
Alors pour tout réel k compris entre les réels $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.
- **Théorème de bijection monotone** : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .
Alors f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$. (*cf. point méthode*)
De plus la bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur J , et son sens de variation est le même que celui de f .
- **Théorème des accroissements finis** : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.
Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
- **Théorème de Rolle** : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.
- **Formules de Taylor-Young** :
 - * Au voisinage de 0 : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant 0. Alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} h^k + o(h^n).$$

- * Au voisinage de x_0 (*Hors programme*) : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et si $x_0 \in I$. Alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :

$$f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n).$$

ou encore

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Méthode : calculer $f(I)$

	f continue et croissante sur I	f continue et décroissante sur I
$I = [a; b], (a, b) \in \mathbb{R}^2$	$f(I) = [f(a); f(b)]$	$f(I) = [f(b); f(a)]$
$I =]a; b], (a, b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$	$f(I) =]\lim_{x \rightarrow a} f(x); f(b)]$	$f(I) = [f(b); \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$
$I = [a; b[, (a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$	$f(I) = [f(a); \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$	$f(I) =]\lim_{x \rightarrow b} f(x); f(a)]$
$I =]a; b[, (a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$	$f(I) =]\lim_{x \rightarrow a} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$	$f(I) =]\lim_{x \rightarrow b} f(x); \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$

Méthode : déterminer une équation d'une asymptote

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f .
- S'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$), alors la droite d'équation $y = y_0$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$, il existe deux méthodes à votre programme pour déterminer si $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.

* Méthode 1 : utilisation de calculs de limites

Étape 1 : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si cette limite vaut 0 ou $\pm\infty$, $\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'asymptote. Sinon on note $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}^*$ et on passe à l'étape 2.

Étape 2 : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax$. Si cette limite vaut $\pm\infty$, $\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'asymptote. Sinon on note $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax$ et on conclut que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

* Méthode 2 : utilisation d'un développement limité

On effectue le changement de variable $h = \frac{1}{x}$ dans l'expression de $f(x)$. Comme $h \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, on peut effectuer des développements limités en h (en général on utilise des DL d'ordre 2).

On revient alors à la variable x et si on obtient une expression du type :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

on peut affirmer que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Ces méthodes sont à adapter au voisinage de $-\infty$.

Méthode : déterminer si une fonction est continue

— **En un point** : il faut revenir à la définition et donc vérifier que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Attention, il faudra parfois distinguer dans les calculs la limite à gauche de a et la limite à droite de a .

— **Sur un intervalle I non réduit à un point** :

* Si f est définie sur TOUT l'intervalle I par une formule utilisant des fonctions usuelles, il suffit d'utiliser l'argument de somme, produit, différence ou quotient de fonctions usuelles continues.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(x-1)^2 e^{-\sqrt{x}}}{x}$.

Les fonctions $x \mapsto (x-1)^2$, $x \mapsto -\sqrt{x}$, $t \mapsto e^t$ et $x \mapsto x$ sont continues respectivement sur $]0; +\infty[$, $]0; +\infty[$ et $] -\infty; 0[$, et $x \mapsto x$ ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$. Donc par composée, produit et quotient de fonctions continues, f est continue sur $]0; +\infty[$.

* Si f est définie en plusieurs morceaux alors la justification se passe en plusieurs morceaux.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Sur $] -\infty; 0[$, f est continue car c'est une fonction usuelle.

Sur $]0; +\infty[$, f est continue car c'est une fonction usuelle.

En 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = e^0 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + 1 = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, c'est-à-dire f est continue en 0.

En conclusion f est continue sur $\mathbb{R}$.

Méthode : déterminer si une fonction est dérivable

— **En un point** : il faut revenir à la définition et donc vérifier que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$ limite finie.

Attention, il faudra parfois distinguer dans les calculs la limite à gauche de a et la limite à droite de a .

— **Sur un intervalle I non réduit à un point** :

* Si f est définie sur TOUT l'intervalle I par une formule utilisant des fonctions usuelles, il suffit d'utiliser l'argument de somme, produit, différence ou quotient de fonctions usuelles dérivables.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(x-1)^2 e^{\sqrt{x}}}{x}$.

Les fonctions $x \mapsto (x-1)^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $t \mapsto e^t$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$ et $x \mapsto x$ ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$. Donc par composée, produit et quotient de fonctions dérivables, f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

* Si f est définie en plusieurs morceaux alors la justification se passe en plusieurs morceaux.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Sur $] -\infty; 0[$, f est dérivable car c'est une fonction usuelle.

Sur $]0; +\infty[$, f est dérivable car c'est une fonction usuelle.

En 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 1 - 1}{x} = 1$. Donc

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ (limite finie), c'est-à-dire f est dérivable en 0.

En conclusion f est dérivable sur $\mathbb{R}$.