Devoir maison n° 2
À rendre le 29 septembre 2025

Il s'agit de l'exercice 6 de la feuille de TD sur les équations différentielles.

On considère l'équation différentielle ci-dessous :

$$|x|y' + (x-1)y = x^3 \quad (E)$$

1. **Résolution sur $\mathbb{R}^{+*}$**
   a) Rechercher sur $\mathbb{R}^{+*}$ une solution particulière de (E), polynômiale du second degré.
   b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. **Résolution sur $\mathbb{R}^{-*}$**
   a) Vérifier que $x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6}{x}$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.
   b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.
3. **Recherche d'une solution sur $\mathbb{R}$**
   Dans cette question on cherche à savoir s'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ |x|f'(x) + (x-1)f(x) = x^3.$$
   a) Supposons qu'une telle fonction f existe.
      (i) Donner l'expression de $f(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$ puis pour $x \in]-\infty; 0[$.
      (ii) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$, puis calculer les limites en 0^+ et en 0^- de f et en déduire alors l'expression de $f(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$, $x \in]-\infty; 0[$ et $x = 0$.
      (iii) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Que peut-on en déduire ?
   b) Réciproquement, vérifier que la fonction f trouvée dans la question précédente satisfait bien au problème donné.