Exercices : Fonctions de deux variables

Domaine de définition, calcul différentiel, ...

Exercice 1 :

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer le domaine de définition, représenter ce domaine (lorsque cela est pertinent), puis calculer les dérivées partielles d'ordre 1.

1. $f(x,y) = \ln(x)e^y + \dfrac{x}{y^3} - 2\cos(y)$;
2. $f(x,y) = \ln(x-1)\sqrt{y} + \sqrt{x+y-3}$;
3. $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(y-x)$;
4. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4x-2y+1} - 3\ln(x^2y)$.

Exercice 2 :

Soit $f(x,y) = \ln(1-xy)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et le représenter graphiquement.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ fixé. Quel est l'ensemble de définition de l'application partielle $h : x \mapsto f(x,\lambda)$. Quel est son sens de variation ?
3. Représenter graphiquement dans un repère orthonormé la ligne de niveau 2.
4. En utilisant un programme Python, tracer la surface représentative de f pour $|x| \leqslant 3$ et $|y| \leqslant 3$.

Exercice 3 :

Soit la fonction définie sur $\mathscr{P} =]-1;1[^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = \dfrac{1}{2}$.

1. Montrer que f est bornée sur son ensemble de définition.

   Indication : on pourra commencer par démontrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. Soit $x \in]-1;1[$, $x \neq 0$. Calculer $f(x,x)$ puis $f(x,0)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ par $f(x,y) = x^y$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
3. Donner une approximation des « variations élémentaires » de f au voisinage de $(1,1)$.

Exercice 5 :

La loi des gaz parfaits peut prendre la forme $PV = nrT$ où n est le nombre de molécules de gaz, V le volume, T la température, P la pression et r une constante.

Montrer que $\dfrac{\partial V}{\partial T} \times \dfrac{\partial T}{\partial P} \times \dfrac{\partial P}{\partial V} = -1$.

Exercice 6 :

Pour une fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ sur un domaine U on définit son laplacien par :

$$\forall (x,y,z) \in U, \qquad \Delta g(x,y,z) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x,y,z).$$

On considère une fonction u de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = u(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
2. a) Montrer que, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$,

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}u''(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) + \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}u'(\sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

   b) Exprimer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en fonction de $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, u' et u''. (*Il restera encore un peu de x, y et z...*)

   c) En déduire une expression du laplacien de f en fonction de $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, u' et u''.
3. On suppose maintenant que $\Delta f = 0$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par u sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Résoudre cette équation.

Exercice 7 :
Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
On cherche les fonctions $u : (t,x) \in \mathbb{R}^2 \mapsto u(t,x) \in \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + 2tx\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0 \qquad \text{et} \qquad u(0,x) = u_0(x). \qquad (E)$$

1. On suppose dans cette question que u est solution de (E).
   a) Soit X une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
   Justifier que la fonction $\varphi : t \mapsto u(t, X(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer pour $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t)$ en fonction de t, X' et $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.
   b) Déterminer alors des fonctions X telles que φ est constante sur $\mathbb{R}$.
2. (**Pour aller plus loin...**)
   Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   On pose, pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(t,y) = u(t, y\mathrm{e}^{t^2})$.
   a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.
   b) Montrer que si u est solution de (E) alors $\forall (y,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,y) = 0$.
   c) Résoudre alors l'équation (E).

Recherche d'extremum

Exercice 8 :
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x,y) = x^2 - 4x + y^3 - 3y$.

1. Montrer que f admet un extremum potentiel uniquement en $(2,1)$ ou en $(2,-1)$.
2. Montrer que pour tout $(h,k) \in \mathbb{R} \times [-3; +\infty[$, $f(2+h, 1+k) - f(2,1) \geqslant 0$.
3. En déduire que f possède un minimum local en $(2,1)$. Est-ce un minimum global ?
4. En observant $f(2+t, -1)$ et $f(2, -1+t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, conclure quant à l'autre extremum potentiel.

Exercice 9 :
Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 + y^2$.

1. Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières en tout point.
2. Montrer que f possède exactement 3 points critiques.
3. a) Calculer $f(0,0)$ et étudier le signe de $f(x,0)$ et $f(0,x)$ lorsque x est au voisinage de 0.
   b) Que peut-on en déduire ?
4. a) Calculer $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, puis $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + h, k\right) - f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.
   b) Que peut-on en déduire pour f ?

Pour aller plus loin...

Exercice 10 :
Soit (S) la surface représentative de la fonction $f : (x,y) \mapsto x((\ln(x))^2 + y^2)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à (S) en $B(\mathrm{e}^{-1}, 1, 2\mathrm{e}^{-1})$, puis montrer que la surface traverse le plan tangent au voisinage du point B.

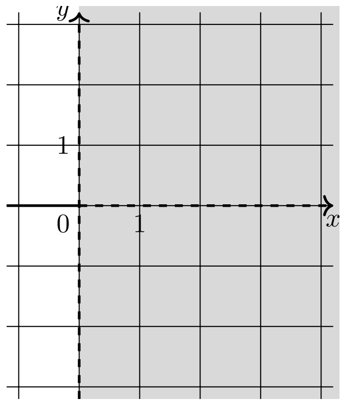
Exercice 11 :

1. On considère la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ par :
$$g(x) = \ln(x) + 2x + 1.$$
   a) Étudier les variations de g et déterminer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
   b) En déduire qu'il existe un unique réel α, élément de $\left]0; \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$, tel que $g(\alpha) = 0$.
2. On considère la fonction de deux variables réelles f définie par :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \ f(x,y) = x\left(\ln(x) + x + y^2\right).$$
   a) Déterminer le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum.
   b) (i) Démontrer que, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ proches de 0,
$$f(\alpha + h, k) - f(\alpha, 0) = k^2(\alpha + h) + o(h).$$
   (ii) Que peut-on en déduire ?

Correction

Correction de l'exercice 1 :

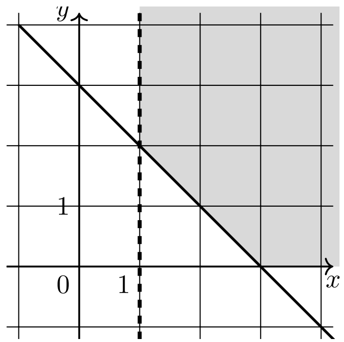
1. $\mathscr{D}_f =]0;+\infty[\times\mathbb{R}^*$.



f est dérivable par rapport à chacune de ses deux variables sur son domaine de définition. De plus, $\forall (x,y)\in\mathscr{D}_f$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{e^y}{x} + \frac{1}{y^3} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x)e^y - \frac{3x}{y^4} + 2\sin(y).$$

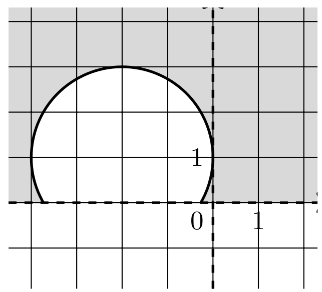
2. $\mathscr{D}_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x-1>0 \text{ et } y\geqslant 0 \text{ et } x+y-3\geqslant 0\}$.



Attention, f n'est pas dérivable par rapport à x en tout point du type $(x,-x+3)$ et f n'est pas dérivable par rapport à y en tout point du type $(x,0)$ ou $(x,-x+3)$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\sqrt{y}}{x-1} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+y-3}}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\ln(x-1)}{2\sqrt{y}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+y-3}}$.

3. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^2$ (on ne va pas le dessiner....). f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ par rapport à ses deux variables et :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(y)\left(\cos(x)\sin(y-x) - \sin(x)\cos(y-x)\right) = \sin(y)\sin(y-2x)$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x)\left(\cos(y)\sin(y-x) + \sin(y)\cos(y-x)\right) = \sin(x)\sin(2y-x)$

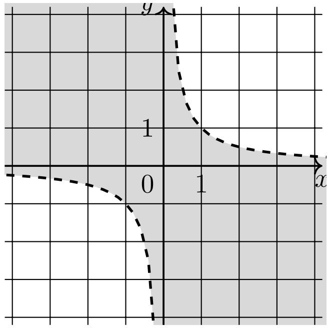
4. $\mathscr{D}_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2+4x-2y+1\geqslant 0 \text{ et } x\neq 0 \text{ et } y>0\}$.
On peut alors remarquer que $x^2+y^2+4x-2y+1\geqslant 0 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2\geqslant 4$, donc la zone du plan correspondant à la contrainte $x^2+y^2+4x-2y+1\geqslant 0$ est la zone située à l'extérieur du cercle de centre $A(-2,1)$ et de rayon 2.



Encore une fois f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x ou à y en tous les points tels que $x^2+y^2+4x-2y+1=0$. En tous les autres points du domaine de définition on a :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2+4x-2y+1}} - \dfrac{6}{x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y-1}{\sqrt{x^2+y^2+4x-2y+1}} - \dfrac{3}{y}$.

Correction de l'exercice 2 :

1. $\mathscr{D}_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / xy<1\}$.
Pour déterminer la zone du plan correspondant à la contrainte $xy<1$ il faut utiliser la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x}$. Mais **attention**, pour $x>0$, $xy<1$ est équivalent à $y<\dfrac{1}{x}$ mais pour $x<0$, $xy<1$ est équivalent à $y>\dfrac{1}{x}$. Donc dans le demi-plan situé à droite de l'axe des ordonnés, on colorie la zone située en dessous de la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ alors que dans le demi-plan situé à gauche de l'axe des ordonnés on va colorier la zone située au dessus de la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x}$.



2. Le domaine de définition de h est l'ensemble des réels x tels que $\lambda x < 1$. Si $\lambda > 0$, alors il s'agit de l'intervalle $]-\infty; \lambda[$ et si $\lambda < 0$ alors c'est l'intervalle $]\lambda; +\infty[$.

   La fonction h est dérivable sur son domaine de définition et $\forall x \in \mathscr{D}_h$, $h'(x) = \dfrac{-\lambda}{1-\lambda x}$.

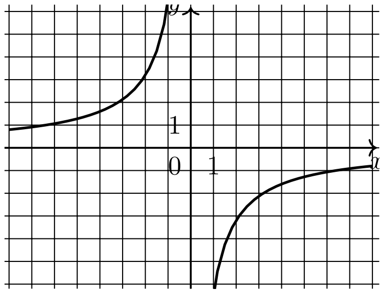
   Lorsque $x \in \mathscr{D}_h$, on a $1-\lambda x > 0$ donc $h'(x)$ est du signe de $-\lambda$.

   Si $\lambda > 0$, h est décroissante sur son domaine de définition, et si $\lambda < 0$, h est croissante sur son domaine de définition.

3. Il s'agit de représenter la courbe d'équation $\ln(1-xy) = 2$. Or :

$$\ln(1-xy) = 2 \Leftrightarrow xy = 1 - \mathrm{e}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y = \dfrac{1-\mathrm{e}^2}{x} \end{cases} .$$

   On obtient donc la courbe suivante :



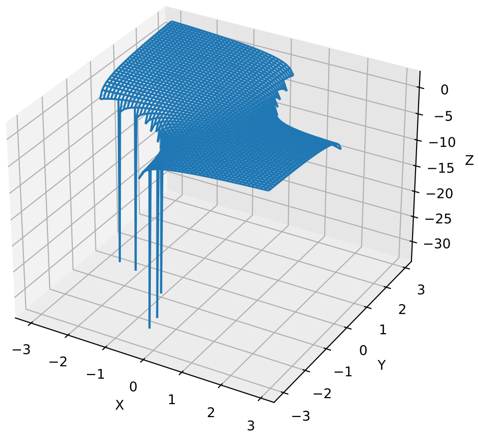
4. Tracé filaire :

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D  # Fonction pour la 3D

def f(x,y):
    if x*y<1:
        return np.log(1-x*y)
    else:
        return 'nan'

x = np.arange(-3, 3, 0.1)
y = np.arange(-3, 3, 0.1)
x,y=np.meshgrid(x,y) # permet de transformer les listes x et y
        #en tableau pour créer le "maillage"
(lx,ly)=np.shape(x)
z=np.zeros([lx,ly])
for i in range(lx):
    for j in range(ly):
        z[i,j]=f(x[i,j],y[i,j])

# Tracé du résultat en 3D
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)
ax.plot_wireframe(x, y, z, rstride=1, cstride=1)  # Tracé filaire
ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('Z')
plt.show()
```



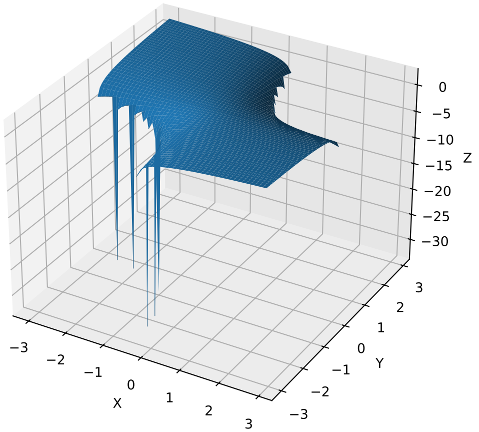
Tracé de surface :

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D  # Fonction pour la 3D
```

```
def f(x,y):
    if x*y<1:
        return np.log(1-x*y)
    else:
        return 'nan'

x = np.arange(-3, 3, 0.1)
y = np.arange(-3, 3, 0.1)
x,y=np.meshgrid(x,y) # permet de transformer les listes x et y
        #en tableau pour créer le "maillage"
(lx,ly)=np.shape(x)
z=np.zeros([lx,ly])
for i in range(lx):
    for j in range(ly):
        z[i,j]=f(x[i,j],y[i,j])

# Tracé du résultat en 3D
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)
ax.plot_surface(x, y, z, rstride=1, cstride=1)  # Tracé de surface
ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('Z')
plt.show()
```



Correction de l'exercice 3 :

1. On remarque que $\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)-|xy|=\dfrac{1}{2}(|x|-|y|)^2$.

   Or, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(|x|-|y|)^2\geqslant 0$, donc $\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\geqslant |xy|$.

   Grâce à cela on peut écrire que, pour tout $(x,y)\in]-1;1[^2\backslash\{(0,0)\}$, $|f(x,y)|\leqslant\dfrac{1}{2}$ et on a évidemment $|f(0,0)|\leqslant\dfrac{1}{2}$.

   Ainsi, pour tout $(x,y)\in\mathscr{P}$, $|f(x,y)|\leqslant\dfrac{1}{2}$, ce qui signifie que f est bien bornée sur son ensemble de définition.

2. $f(x,x)=\dfrac{1}{2}$ et $f(x,0)=0$. On a donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x,x)=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}f(x,0)=0$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Correction de l'exercice 4 :

Il est intéressant, dans cet exercice, d'écrire f sous la forme $f(x,y)=\mathrm{e}^{y\ln(x)}$.

1. Par produit de fonctions usuelles, la fonction $(x,y)\mapsto y\ln(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, la fonction $t\mapsto\mathrm{e}^t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc par composée, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$.

2. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{y}{x}\mathrm{e}^{y\ln(x)}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\ln(x)\mathrm{e}^{y\ln(x)}$.

3. D'après le cours, lorsque (x,y) est proche de $(1,1)$ on a :

$$f(x,y)-f(1,1)\approx\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)=x-1.$$

   Comme $f(1,1)=1$, on a donc, au voisinage de $(1,1)$, $f(x,y)\approx x$.

Correction de l'exercice 5 :

On a $V=\dfrac{nrT}{P}$ donc $\dfrac{\partial V}{\partial T}=\dfrac{nr}{P}$.
On a aussi, $T=\dfrac{PV}{nr}$ donc $\dfrac{\partial T}{\partial P}=\dfrac{V}{nr}$.
Et enfin, $P=\dfrac{nrT}{V}$ donc $\dfrac{\partial P}{\partial V}=-\dfrac{nrT}{V^2}$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial T}\times\frac{\partial T}{\partial P}\times\frac{\partial P}{\partial V}&=\frac{nr}{P}\times\frac{V}{nr}\times\left(-\frac{nrT}{V^2}\right)\\&=-\frac{nrT}{PV}=-1.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 :

1.
   - La fonction $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, car polynômiale en x, y et z, et est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.
   - La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.
   - Enfin, la fonction u est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Donc par composée f est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
2. a) On a tout d'abord :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}u'(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}u'(\sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

En dérivant à nouveau par rapport à x, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1 \times \sqrt{x^2+y^2+z^2} - x \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}u'(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\ &\quad + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 u''(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\ &= \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}u'(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) + \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}u''(\sqrt{x^2+y^2+z^2}).\end{aligned}$$

b) On peut alors écrire $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \dfrac{y^2+z^2}{r^3}u'(r) + \dfrac{x^2}{r^2}u''(r)$.

c) Les rôles de x, y et z étant identiques, on a facilement une expression de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

On en déduit que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$:

$$\begin{aligned}\Delta f(x,y,z) = &\frac{y^2+z^2}{r^3}u'(r) + \frac{x^2}{r^2}u''(r) \\ &\frac{x^2+z^2}{r^3}u'(r) + \frac{y^2}{r^2}u''(r) \\ &\frac{x^2+y^2}{r^3}u'(r) + \frac{z^2}{r^2}u''(r) \\ = &\frac{2r^2}{r^3}u'(r) + u''(r) = \frac{2}{r}u'(r) + u''(r).\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente,

$$\Delta f = 0 \Rightarrow \forall r \in \mathbb{R}^{+*}, \quad u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) = 0.$$

Donc, si $\Delta f = 0$, alors u est solution de l'équation différentielle $u'' + \dfrac{2}{r}u' = 0$ $(\star)$.

4. On a ici une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants que l'on ne sait normalement pas résoudre sans aide.
   L'astuce consiste à remarquer que cette équation peut se voir comme une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en posant $h = u'$. En effet, h est solution de $h' + \dfrac{2}{r}h = 0$.
   Une primitive de $r \mapsto \dfrac{2}{r}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $r \mapsto 2\ln(|r|) = 2\ln(r)$.
   Donc il existe une constante réelle C telle que, pour tout $r \in \mathbb{R}^{+*}$,
   $h(r) = C\mathrm{e}^{-2\ln(r)} = \dfrac{C}{r^2}$.
   Ainsi, u est solution $(\star)$ si, et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $r \in \mathbb{R}^{+*}$,
   $u'(r) = C\mathrm{e}^{-2\ln(r)} = \dfrac{C}{r^2}$.
   On en déduit u est solution $(\star)$ si, et seulement s'il existe $(C, K) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $u(r) = -\dfrac{C}{r} + K$.

Correction de l'exercice 7 :

1. a) La fonction $t \mapsto X(t)$ est supposée de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   La fonction $(t, x) \mapsto u(t, x)$ est supposée de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   Donc, par composée, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi'(t) = 1 \times \frac{\partial u}{\partial t}(t, X(t)) + X'(t) \times \frac{\partial u}{\partial x}(t, X(t)) = (-2tX(t) + X'(t))\frac{\partial u}{\partial x}(t, X(t)),$$

en utilisant le fait que u est solution de (E) donc $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -2tx\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x)$.

b) On sait que φ est constante si, et seulement si, sa dérivée est nulle.
   On remarque que si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $-2tX(t) + X'(t) = 0$ alors on aura bien $\varphi' = 0$.
   Les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y' - 2ty = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto K\mathrm{e}^{t^2}$ avec $K \in \mathbb{R}$.
   Donc en prenant $X(t) = K\mathrm{e}^{t^2}$ ($K \in \mathbb{R}$ à choisir), on a $\varphi'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc φ est constante.

2. a) L'application $(t,y)\mapsto (t,y\mathrm{e}^{t^2})$ est de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
La fonction u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Donc, par composée, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Pour tout $(t,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y)=\frac{\partial u}{\partial t}(t,y\mathrm{e}^{t^2})+2ty\mathrm{e}^{t^2}\frac{\partial u}{\partial x}(t,y\mathrm{e}^{t^2})$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)=\mathrm{e}^{t^2}\frac{\partial u}{\partial x}(t,y\mathrm{e}^{t^2}).$$

b) On remarque que

$$\begin{aligned}&\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+2tx\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)=0\\ \Leftrightarrow&\forall(y,t)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,y\mathrm{e}^{t^2})+2ty\mathrm{e}^{t^2}\frac{\partial u}{\partial x}(t,y\mathrm{e}^{t^2})=0\\ \Leftrightarrow&\forall(y,t)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial t}(t,y)=0.\end{aligned}$$

Donc si u est solution de (E) alors $\forall(y,t)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial t}(t,y)=0$.

c) Dire que la dérivée de f par rapport à t est nulle est équivalent à dire que f est constante par rapport à t ce qui équivaut à dire que f ne dépend que de y.
Cela signifie qu'il existe $\alpha\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall(y,t)\in\mathbb{R}^2,\quad f(t,y)=\alpha(y)$.
On revient alors à la fonction u en remarquant que $x=y\mathrm{e}^{t^2}\Leftrightarrow y=x\mathrm{e}^{-t^2}$.
Ainsi, si u est solution de (E) alors il existe $\alpha\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad u(t,x)=\alpha(x\mathrm{e}^{-t^2})$.
En ajoutant la condition initiale, on obtient que $\alpha(x)=u_0(x)$.
On a montré que si u est solution de (E) alors $\forall(t,x)\in\mathbb{R}^2$, $u(t,x)=u_0(x\mathrm{e}^{-t^2})$.
Réciproquement la fonction $(t,x)\mapsto u_0(x\mathrm{e}^{-t^2})$ est bien solution de (E).
Donc u est solution de (E) si, et seulement si, $\forall(t,x)\in\mathbb{R}^2$, $u(t,x)=u_0(x\mathrm{e}^{-t^2})$.

Correction de l'exercice 8 :

1. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-4\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-3.$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un pavé ouvert, on sait que les seuls points où f est susceptible d'admettre un extremum sont les points critiques, c'est-à-dire les solutions de :

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4=0\\ 3y^2-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\text{ ou }y=-1.\end{cases}$$

f peut donc admettre un extremum uniquement en $(2,1)$ ou $(2,-1)$.

2. On a pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}\times[-3;+\infty[$:

$$\begin{aligned}f(2+h,1+k)-f(2,1)&=(2+h)^2-4(2+h)+(1+k)^3-3(1+k)-(-6)\\&=h^2+4h-4h+k^3+3k^2+3k-3k\\&=h^2+k^2(k+3).\end{aligned}$$

Donc pour $h\in\mathbb{R}$ et $k\geqslant -3$, $f(2+h,1+k)-f(2,1)\geqslant 0$.

3. D'après la question précédente, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $y\geqslant -2$, $f(x,y)\geqslant f(2,1)$.
Cela signifie que f admet un minimum local en $(2,1)$.
Mais ce n'est pas un minimum global car, par exemple, $f(0,-3)=-27+9<f(2,1)$.

4. On a, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$f(2+t,-1)=(2+t)^2-4(2+t)-1+3=t^2+4t+4-8-4t+2=t^2-2.$$

De même, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f(2,-1+t)&=-4+(-1+t)^3-3(-1+t)\\&=-4-1+3t-3t^2+t^3+3-3t\\&=-2-3t^2+t^3.\end{aligned}$$

On a donc $f(2+t,-1)-f(2,-1)=t^2>0$ pour tout $t\in\mathbb{R}^*$.
Et $f(2,-1+t)-f(2,-1)=t^2(t-3)<0$ pour $t\in]-\infty;3[\setminus\{0\}$.
Ainsi au voisinage de $(2,-1)$, $f(x,y)-f(2,-1)$ n'est pas de signe constant et donc f n'admet pas d'extremum local en $(2,-1)$.

Correction de l'exercice 9 :

1. f est une fonction polynômiale donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-2x\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y^3+2y.$$

2.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(2x^2-1) = 0 \\ 2y(2y^2+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \end{cases}.$$

f admet donc 3 points critiques $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ et $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

3. a) $f(0,0) = 0$.
$f(x,0) = x^2(x^2-1)$ donc pour $x \in]-1;0[\cup]0;1[$, $f(x,0) < 0$.
$f(0,x) = x^4 + x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
b) $f(x,y) - f(0,0)$ change donc de signe au voisinage de $(0,0)$ et ainsi f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$.

4. a) $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+h,k\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+h\right)^4 + k^4 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+h\right)^2 + k^2 + \frac{1}{4} \\ &= \ldots = h^2\left(h+\sqrt{2}\right)^2 + k^4 + k^2. \end{aligned}$$

b) Donc pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+h,k\right) - f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right) \geqslant 0$.

f admet donc un minimum global en $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

Correction de l'exercice 10 :

— **Équation du plan tangent en B :**
Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.
On remarque que $(e^{-1},1) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ et $f(e^{-1},1) = 2e^{-1}$ donc B est bien situé sur la surface (S).
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition donc on sait que le plan tangent à (S) en B a pour équation :

$$z = f(e^{-1},1) + (x - e^{-1})\frac{\partial f}{\partial x}(e^{-1},1) + (y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(e^{-1},1).$$

Or $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (\ln(x))^2 + y^2 + 2\ln(x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$.
Ainsi, le plan tangent en B à S a pour équation :

$$z = 2e^{-1} + 0 \times (x - e^{-1}) + 2e^{-1} \times (y-1) \Leftrightarrow z = 2e^{-1}y.$$

— **Position de la surface par rapport au plan :**
Pour étudier la position de la surface par rapport au plan, il faut étudier le signe de $\Delta(x,y) = x((\ln(x))^2 + y^2) - 2e^{-1}y$
(*équation de la surface − équation du plan*).
On remarque alors que $\Delta(e^{-1},y) = e^{-1}(1+y^2) - 2e^{-1}y = e^{-1}(y-1)^2 \geqslant 0$.
Et $\Delta(x,1) = x((\ln(x))^2+1) - 2e^{-1}$. Le signe de cette quantité n'est pas évident, il faut donc étudier le signe de la fonction $h(x) = x((\ln(x))^2+1) - 2e^{-1}$ en faisant un tableau de variation.
On a $h'(x) = (\ln(x))^2 + 1 + 2\ln(x) = (\ln(x)+1)^2 > 0$. Donc :

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$h'(x)$	||	$+$	
$h(x)$	|| $-2e^{-1}$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Donc $\Delta(x,1)$ change de signe au voisinage de e^{-1}.
Donc, au voisinage de B, la surface traverse le plan tangent en B.

Correction de l'exercice 11 :

1. a) $g'(x) = \dfrac{1}{x} + 2$, et les limites ne posent pas de soucis :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, elle réalise donc, d'après le théorème de bijection monotone, une bijection de $]0;+\infty[$ sir $\mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, il admet un unique antécédent par g que nous noterons α.
De plus, $g(1/e) = \dfrac{2}{e} > 0$ et $\lim\limits_{0^+} g = -\infty$, donc on a bien $\alpha \in \left]0;\dfrac{1}{e}\right[$.

2. a) Cherchons le ou les points en lesquels les dérivées partielles de f s'annulent simultanément :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) + 2x + y^2 + 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Dans la deuxième équation, nous n'avons pas considéré l'option $x = 0$ car c'est impossible.

Ainsi le seul point où f est susceptible de présenter un extremum est le point $(\alpha, 0)$.

b) (i) Pour h et k proches de 0 :

$$\begin{aligned}
f(\alpha+h,0+k)-f(\alpha,0) &= (\alpha+h)\left(\ln(\alpha+h)+\alpha+h+k^2\right)-\alpha(\ln(\alpha)+\alpha)\\
&= \alpha\ln\left(1+\frac{h}{\alpha}\right)+h\ln(\alpha+h)+2\alpha h+h^2\\
&\quad +k^2(\alpha+h)\\
&= \alpha\ln\left(1+\frac{h}{\alpha}\right)+h\ln(\alpha)+h\ln\left(1+\frac{h}{\alpha}\right)+2\alpha h+h^2\\
&\quad +k^2(\alpha+h)\\
&= (\alpha+h)\left(\frac{h}{\alpha}+o(h)\right)+h(-2\alpha-1)+2\alpha h+h^2\\
&\quad +k^2(\alpha+h)\\
&= h+o(h)-2\alpha h-h+2\alpha h+h^2+k^2(\alpha+h)\\
&= k^2(\alpha+h)+o(h)
\end{aligned}$$

(ii) Donc pour h et k proches de 0, $f(\alpha+h,0+k)-f(\alpha,0)\geqslant 0$ et ainsi f admet un minimum local en $(\alpha, 0)$