Correction du devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2

Exercice 1

1. a) L'équation peut se réécrire $x'(t) + x(t) = 0$. La fonction $t \mapsto 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto t$ en est une primitive. On peut donc affirmer que l'ensemble des solutions de cette équation est $\boxed{\mathscr{S}_{(H)} = \left\{t \mapsto K\mathrm{e}^{-t}; K \in \mathbb{R}\right\}.}$

   b) La fonction x_0 proposée est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions usuelles dérivables) et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_0'(t) = -(at+b)\mathrm{e}^{-t} + a\mathrm{e}^{-t}.$$

   Ainsi

$$\begin{aligned} x_0 \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad -(at+b)\mathrm{e}^{-t} + a\mathrm{e}^{-t} = -(at+b)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad a\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad a = 1. \end{aligned}$$

   En choisissant $b = 0$, on a que $\boxed{x_0 : t \mapsto t\mathrm{e}^{-t} \text{ est une solution particulière de } (E).}$

   c) D'après le théorème de structure pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1 (les fonctions $t \mapsto 1$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ étant continues sur $\mathbb{R}$) :
   $\boxed{\mathscr{S}_{(E)} = \left\{t \mapsto (t+K)\mathrm{e}^{-t}; K \in \mathbb{R}\right\}.}$

2. a) La fonction y est solution de l'équation de la question 1.a).
   D'après la question 1.a), il existe donc une constante K_1 réelle telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = K_1\mathrm{e}^{-t}$. De plus, $y(0) = 1$ donc $K_1 = 1$.
   Ainsi, pour tout t réel, $y(t) = \mathrm{e}^{-t}$.
   On en déduit que x est solution de l'équation (E).
   D'après la question 1.c), il existe donc une constante K_2 réelle telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = (t + K_2)\mathrm{e}^{-t}$.
   De plus, $x(0) = 1$ donc $K_2 = 1$.
   En résumé, l'unique solution de (S) qui vérifie $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$ est $\boxed{t \mapsto ((t+1)\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^{-t}).}$

   b) On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = t\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}$.
   Donc, d'après les règles des croissances comparées (pour x) et par simples opérations sur les limites (pour x et y), $\boxed{\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.}$

3.
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
T = np.linspace(-2,10,200)
x = [(t+1)*np.exp(-t) for t in T]
y = [np.exp(-t) for t in T]
plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Exercice 2 : Agro-véto 2016

1. a) On note $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et elle est dérivable sur son ensemble de définition comme produit de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$. $f'(x)$ est donc du signe de $1-\ln(x)$. On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

   La limite en 0 s'obtient par simple opération sur les limites, la limite en $+\infty$ est une limite faisant partie des règles des croissances comparées.

   b) Pour $k \geqslant 4$, on a $[k;k+1] \subset [\mathrm{e};+\infty[$ donc la fonction f est décroissante sur $[k;k+1]$ et ainsi

$$\forall x \in [k;k+1], \qquad \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{\ln(k)}{k}.$$

   Par propriété de croissance de l'intégrale, on a donc

$$\begin{aligned} &\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln(k)}{k}\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow &\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(k)}{k}. \end{aligned}$$

   Le raisonnement est exactement le même pour la deuxième partie de l'inégalité en remarquant que f est aussi décroissante sur $[k-1;k] \subset [\mathrm{e};+\infty[$ et donc $\forall x \in [k-1;k]$, $\dfrac{\ln(k)}{k} \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x}$.

   En résumé, $\boxed{\text{pour tout entier } k \text{ supérieur ou égal à 4, } \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.}$

   c) Soit $n \geqslant 4$. Sommons les inégalités précédentes, pour k allant de 4 à n. On obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=4}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow &\int_4^{n+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_3^{n} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{relation de Chasles} \\ \Leftrightarrow &\left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_4^{n+1} \leqslant S_n - \left(\frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}\right) \leqslant \left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_3^{n} \\ \Leftrightarrow &\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(4)}{2} \leqslant S_n - \left(\frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}\right) \leqslant \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2}. \end{aligned}$$

   d) On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(4)}{2} = +\infty$ donc par comparaison de limites, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.}$

2. a) Soit $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} &= \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^2. \end{aligned}$$

Par simples opérations sur les limites, $\lim_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} = 1$, c'est-à-dire $\boxed{\ln^2(n+1) \sim \ln^2(n).}$

b) D'après la question 1.c), pour $n \geqslant 4$, en divisant par $\dfrac{\ln^2(n)}{2}$ qui est non nul, on a :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} - \frac{2A}{\ln^2(n)} + \frac{2B}{\ln^2(n)} \leqslant \frac{S_n}{\ln^2(n)/2} \leqslant 1 - \frac{2C}{\ln^2(n)} + \frac{2B}{\ln^2(n)}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{2C}{\ln^2(n)} + \dfrac{2B}{\ln^2(n)} = 1$ (opérations sur les limites) et d'après la question précédente, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} - \dfrac{2A}{\ln^2(n)} + \dfrac{2B}{\ln^2(n)} = 1$.

Par encadrement de limites, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\ln^2(n)/2} = 1$, c'est-à-dire $\boxed{S_n \sim \dfrac{\ln^2(n)}{2}.}$

3. a) Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} - S_n + \frac{\ln^2(n)}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} + \frac{\ln^2(n)}{2} \end{aligned}$$

On reprend alors la partie de droite de l'encadrement de la question 1.b). On avait montré que, pour $k \geqslant 4$:

$$\frac{\ln(k)}{k} \leqslant \frac{\ln^2(k)}{2} - \frac{\ln^2(k-1)}{2}.$$

On applique cela pour $k = n+1$ (qui est bien supérieur ou égal à 4 car $n \geqslant 3$) et on obtient :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

On a donc bien $\boxed{u_{n+1} - u_n \leqslant 0.}$

b) D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.
De plus, d'après la partie de gauche de l'encadrement de la question 1.c), pour $n \geqslant 4$:

$$S_n - \frac{\ln^2(n)}{2} \geqslant \frac{\ln^2(n+1)}{2} - A + B - \frac{\ln^2(n)}{2} \geqslant -A + B,$$

car $\dfrac{\ln^2(n+1)}{2} - \dfrac{\ln^2(n)}{2} \geqslant 0$.
La suite $(u_n)_{n\geqslant 4}$ est donc minorée.

D'après le théorème de la limite monotone $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \sum_{p=1}^{n} (-1)^{2p-1} \frac{\ln(2p)}{2p} + \sum_{p=1}^{n} (-1)^{2p-2} \frac{\ln(2p-1)}{2p-1} \qquad \text{séparation des termes d'indice pairs et impairs} \\
&= -\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p} + \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p-1)}{2p-1} \\
&= -2\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p} + \underbrace{\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p} + \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p-1)}{2p-1}}_{S_{2n}} \\
&= -2\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2)+\ln(p)}{2p} + S_{2n} \\
&= -\ln(2)\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(p)}{p} + S_{2n} \\
&= S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

On a bien $\boxed{A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.}$

b) D'après la question 3. $S_n = \dfrac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1)$. Avec le résultat admis dans cette question, et d'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= \frac{\ln^2(2n)}{2} + \ell + o(1) - \left(\frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1)\right) - \ln(2)\left(\ln(n) + \gamma + o(1)\right) \\
&= \frac{\ln^2(2n)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ln(2)\ln(n) - \ln(2)\gamma + o(1) \\
&= \frac{(\ln(n)+\ln(2))^2}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ln(2)\ln(n) - \ln(2)\gamma + o(1) \\
&= \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma + o(1).
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_{2n} = \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma.}$

c) On a $A_{2n+1} = A_{2n} + \dfrac{\ln(2n+1)}{2n+1}$. Or, d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(2n+1)}{2n+1} = 0$.

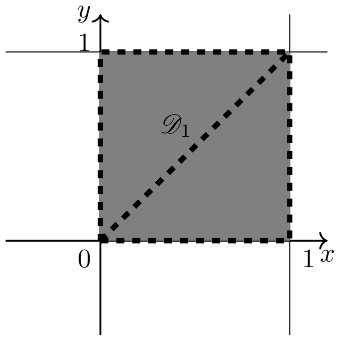
Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_{2n+1} = \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma.}$

d) Les suites extraites de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'indices pairs et impairs convergente vers la même limite donc
$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma.}$

Problème : G2E 2018

Partie A : Étude de trois fonctions

1. a) On a $\boxed{\mathscr{D}_1 = \{(x,y) \in]0;1[^2 \ / \ x \neq y\}}$, que l'on peut représenter comme ceci :



   b) On a : $\mathscr{D}_2 = \{x \in]0;1[/ x \neq 1-x\}$ donc $\boxed{\mathscr{D}_2 = \left]0;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};1\right[}$.

2. a) Pour tout $(x,y) \in]0;1[^2$:

$$\boxed{\frac{\partial f_k}{\partial x}(x,y) = kx^{k-1}y - y^k \qquad \frac{\partial f_k}{\partial y}(x,y) = x^k - ky^{k-1}x.}$$

   De plus, la fonction h_k est la composée de f_k avec les deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1-x$, donc d'après la formule de dérivation des composées, on a :
   pour tout $x \in]0;1[$, $h_k'(x) = 1 \times \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, 1-x) + (-1) \times \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, 1-x)$, d'où :

$$h_k'\left(\frac{1}{2}\right) = k\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k - k\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \boxed{(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}.$$

   b) On peut remarquer que $h_k\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ et donc

$$\varphi_k(x) = \frac{h_k(x)}{2x-1} = \frac{1}{2} \times \frac{h_k(x) - h_k\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}. \text{ (On fait apparaitre le taux d'accroissement de } h_k \text{ en } \frac{1}{2}\text{)}$$

   D'après la question précédente, h_k est dérivable en $\dfrac{1}{2}$ et son nombre dérivé vaut $(k-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$.

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \varphi_k(x) = \dfrac{1}{2} h_k'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{k-1}{2^k}.}$

   c) La fonction φ_k est maintenant continue en $\dfrac{1}{2}$, donc $\boxed{\varphi_k\left(\dfrac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \varphi_k(x) = \dfrac{k-1}{2^k}}$.

3. a) Pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k.\end{aligned}$$

   On reconnait les sommes partielles d'une série géométrique et de sa série dérivée. Comme $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, ces deux séries sont convergentes.
   Donc $\sum \varphi_k\left(\dfrac{1}{2}\right)$ est convergente et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 - 1 = 1.$$

Considérons maintenant $x \neq \frac{1}{2}$. Pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k(1-x) - x(1-x)^k}{2x-1} \\
&= \frac{1-x}{2x-1} \sum_{k=1}^{n} x^k - \frac{x}{2x-1} \sum_{k=1}^{n} (1-x)^k.
\end{aligned}$$

On reconnait les sommes partielles de deux séries géométriques. Comme $|x| < 1$ et $|1-x| < 1$, ces deux séries sont convergentes. Donc $\sum \varphi_k(x)$ est convergente et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(x) = \frac{1-x}{2x-1} \times \frac{x}{1-x} - \frac{x}{2x-1} \times \frac{1-x}{1-(1-x)} = 1.$$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
Pour $x = \frac{1}{2}$ on vérifie facilement la relation demandée (on vous laisse le faire !), et pour $x \neq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\varphi_{k+1}(x) &= \frac{x^{k+1}(1-x) - x(1-x)^{k+1}}{2x-1} \\
&= x \times \underbrace{\frac{x^k(1-x)}{2x-1}}_{\varphi_k(x) + \frac{x(1-x)^k}{2x-1}} - (1-x) \times \frac{x(1-x)^k}{2x-1} \\
&= x\varphi_k(x) + x \times \frac{x(1-x)^k}{2x-1} - (1-x) \times \frac{x(1-x)^k}{2x-1} \\
&= x\varphi_k(x) + x(1-x)^k.
\end{aligned}$$

On aurait aussi pu partir de $x\varphi_k(x) + x(1-x)^k$.

Partie B : Temps d'attente

1. a) Le fait d'avoir obtenu 7 à l'écran signifie qu'on a obtenu pour la première fois le motif ppf au septième tirage. La variable `tirage` contient donc une chaine de 7 caractères finissant par ppf et n'ayant pas ce motif parmi les 4 premiers tirages.
On a par exemple pu avoir `tirage='fpffppf'`.
Pour obtenir ce résultat les valeurs de `random` ont par exemple été :

$$0.52,\ 0.31,\ 0.84,\ 0.65,\ 0.12,\ 0.42,\ 0.71$$

(face correspond à un random supérieur à 0,45 et pile à un random inférieur à 0,45)

b)
```
def proba(motif,a):
    k=len(motif)
    p=0
    for _ in range(1000):
        if temps_d_attente(motif,a)==len(a):
            p+=1
    return p/1000
```

c)
```
def temps_d_attente_bis(motif,a):
    lm=len(motif)
    tirage = ''  # chaine vide
    while True:
        tirage += lancer_piece(a)
        if tirage[-lm :] == motif:
            return len(tirage)
            # lorsque le motif est obtenu, le return interrompt la boucle while
```

2. a) (i) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\boxed{Y_k = \mathrm{f}_1 \cap \mathrm{f}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{f}_{k-1} \cap \mathrm{p}_k.}$ On a donc

$$\begin{aligned}
P(Y_k) &= P(\mathrm{f}_1 \cap \mathrm{f}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{f}_{k-1} \cap \mathrm{p}_k) \\
&= P(\mathrm{f}_1) \times P(\mathrm{f}_2) \times \ldots \times P(\mathrm{f}_{k-1}) \times P(\mathrm{p}_k) \qquad \text{car lancers indépendants} \\
&= \boxed{(1-a)^{k-1} a}.
\end{aligned}$$

(ii) Pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $i \neq j$, on a $Y_i \cap Y_j = \emptyset$ car il est impossible que le premier pile apparaisse à deux numéros de lancers différents.

De plus, sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y_k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} a(1-a)^{k-1} \\ &= a\sum_{j=0}^{+\infty}(1-a)^j && \text{on a posé } j = k-1 \\ &= a \times \frac{1}{1-(1-a)} && \text{somme de série géométrique, convergente car } |1-a|<1 \\ &= 1.\end{aligned}$$

$\boxed{(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est bien un système quasi-complet d'événements.}}$

(iii) — Première méthode : $P_{\mathrm{f}_1}(T_{k+1}) = \dfrac{P(\mathrm{f}_1 \cap T_{k+1})}{P(\mathrm{f}_1)}$.

Or $\mathrm{f}_1 \cap T_{k+1} = \mathrm{f}_1 \cap \mathrm{f}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{f}_k \cap \mathrm{p}_{k+1}$ car avec face au premier tirage, le premier pile qui est obtenu réalise le motif fp.

Comme les lancers sont mutuellement indépendants, on a :
$P(\mathrm{f}_1 \cap T_{k+1}) = P(\mathrm{f}_1 \cap \mathrm{f}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{f}_k \cap \mathrm{p}_{k+1}) = (1-a)^k a$.

D'où $P_{\mathrm{f}_1}(T_{k+1}) = \dfrac{(1-a)^k a}{1-a} = (1-a)^{k-1}a = P(Y_k)$.

— Deuxième méthode : comme ci-dessus, sachant que l'on obtient face au premier lancer, l'événement T_{k+1} est l'événement $\mathrm{f}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{f}_k \cap \mathrm{p}_{k+1}$. On a donc :

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{f}_1}(T_{k+1}) &= P_{\mathrm{f}_1}(\mathrm{f}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{f}_k \cap \mathrm{p}_{k+1}) \\ &= P(\mathrm{f}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{f}_k \cap \mathrm{p}_{k+1}) \text{ car les lancers 2,3 ... } k+1 \text{ sont indépendants du premier lancer} \\ &= (1-a)^{k-1}a \\ &= P(Y_k).\end{aligned}$$

Dans tous les cas, $\boxed{P_{\mathrm{f}_1}(T_{k+1}) = P(Y_k).}$

(iv) Les événements $(\mathrm{p}_1, \mathrm{f}_1)$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(T_{k+1}) &= P(\mathrm{p}_1)P_{\mathrm{p}_1}(T_{k+1}) + P(\mathrm{f}_1)P_{\mathrm{f}_1}(T_{k+1}) \\ &= aP_{\mathrm{p}_1}(T_{k+1}) + a(1-a)^k\end{aligned}$$

Comme le motif 'fp' ne commence pas par 'p', le fait d'imposer d'avoir obtenu pile au premier lancer n'influence pas le résultat des lancers suivants. Calculer la probabilité de l'événement T_{k+1} sachant p_1 revient donc à calculer la probabilité de l'événement T_k : le temps d'attente est compté à partir du deuxième lancer.

On obtient donc bien $\boxed{P(T_{k+1}) = a(1-a)^k + aP(T_k)}$.

(v) On a vu dans la partie A, que φ_k vérifie : $\varphi_{k+1}(a) = a(1-a)^k + a\varphi_k(a)$.

Donc d'après la question précédente, les deux suites $(P(T_k))_{k\geqslant 1}$ et $(\varphi_k(a))_{k\geqslant 1}$ vérifient la même relation de récurrence.

De plus, pour $k=1$, on a $P(T_1) = 0$ (il est impossible d'obtenir le motif fp après un seul lancer) et on a aussi $\varphi_1(a) = 0$ (car $f_1(x,y) = xy - xy = 0$).

Les deux suites vérifient donc la même relation de récurrence et la même condition initiale, on peut donc affirmer qu'elles sont égales (par récurrence immédiate).

Ainsi $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, P(T_k) = \varphi_k(a)}$.

b) Notons M l'événement le motif fp apparait lors de l'expérience.

On a $M = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} T_k$. Les événements $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ étant incompatibles deux à deux, on a donc d'après l'axiome de σ-additivité :

$$P(M) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(a) = 1,$$

d'après la question A. 3. a).

$\boxed{\text{Il est donc presque sûr que le motif fp apparaisse lors de l'expérience.}}$

c) La famille d'événements $(\mathrm{f}_1, \mathrm{p}_1 \cap \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_1 \cap \mathrm{f}_2)$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(Z_{k+2}) &= P(\mathrm{f}_1)P_{\mathrm{f}_1}(Z_{k+2}) + P(\mathrm{p}_1 \cap \mathrm{p}_2)\underbrace{P_{\mathrm{p}_1\cap\mathrm{p}_2}(Z_{k+2})}_{=0} + P(\mathrm{p}_1 \cap \mathrm{f}_2)P_{\mathrm{p}_1\cap\mathrm{f}_2}(Z_{k+2}) \\ &= (1-a)P_{\mathrm{f}_1}(Z_{k+2}) + a(1-a)P_{\mathrm{p}_1\cap\mathrm{f}_2}(Z_{k+2}). \end{aligned}$$

$P_{\mathrm{p}_1\cap\mathrm{p}_2}(Z_{k+2}) = 0$ car sachant que les deux premiers lancers ont donné pile, on a Z_2 (et non pas Z_{k+2}).
D'autre part, comme au 2. a) iii. (ici 'pp' ne commence pas par 'f') le fait d'imposer d'avoir obtenu face au premier lancer n'influence pas le résultat des lancers suivants. Calculer la probabilité de l'événement Z_{k+2} sachant f_1 revient donc à calculer la probabilité de l'événement Z_{k+1}.
De même, le fait d'imposer d'avoir obtenu pile puis face aux deux premiers lancer n'influence pas le résultat des lancers suivants. Calculer la probabilité de l'événement Z_{k+2} sachant $\mathrm{p}_1 \cap \mathrm{f}_2$ revient donc à calculer la probabilité de l'événement Z_k : ici le temps d'attente est compté à partir du troisième lancer.
On obtient donc bien $\boxed{P(Z_{k+2}) = (1-a)P(Z_{k+1}) + a(1-a)P(Z_k)}$.

d) (i) Le discriminant de l'équation est : $\Delta = (1-a)^2 + 4a(1-a) > 0$.
Donc $\boxed{\text{l'équation } x^2 - (1-a)x - a(1-a) = 0 \text{ admet deux racines réelles distinctes.}}$

(ii) Comme $(x - r_1)(x - r - 2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$, et que deux polynômes sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients sont égaux, on en déduit que $\boxed{r_1 + r_2 = 1 - a}$ et $\boxed{r_1 r_2 = -a(1-a)}$.

(iii) Notons donc $h : x \mapsto x^2 - (1-a)x - a(1-a)$.
On remarque que h est continue sur $\mathbb{R}$, décroissante sur $]-\infty; -1]$, croissante sur $[1; +\infty[$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = +\infty$ et de plus $h(1) = a^2 > 0$ et $h(-1) = 2(1-a) + a^2 > 0$.
Donc h ne s'annule pas sur $]-\infty; -1]$ et $[1; +\infty[$. $\boxed{r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont dans }]-1;1[.}$

e) La suite $(P(Z_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique associée est $r^2 - (1-a)r - a(1-a) = 0$.
D'après la question précédente, cette équation admet deux racines réelles distinctes, r_1 et r_2, donc on sait qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Z_k) = \lambda r_1^k + \mu r_2^k.}$$

f) Le motif pp ne peut pas apparaitre dès le premier lancer donc $\boxed{P(Z_1) = 0}$.

Le motif pp apparait au deuxième lancer signifie que les deux premiers lancers ont donné pile donc $\boxed{P(Z_2) = a^2}$.

En appliquant la relation de la question précédente pour $k = 1$, on obtient $\boxed{\lambda r_1 + \mu r_2 = 0}$.

En appliquant la relation de la question précédente pour $k = 2$, on obtient $\lambda r_1^2 + \mu r_2^2 = a^2$.
En exploitant les deux relations on a :

$$\begin{aligned} &\lambda r_1 \times r_1 + \mu r_2 \times r_2 = a^2 \\ \Rightarrow &(-\mu r_2) \times r_1 + (-\lambda r_1) \times r_2 = a^2 \\ \Rightarrow &\mu + \lambda = -\frac{a^2}{r_1 r_2} = \frac{a}{1-a}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\lambda + \mu = \dfrac{a}{1-a}}$.
On multiplie alors la relation précédente par $r_1 + r_2$:

$$\begin{aligned} &\lambda(r_1 + r_2) + \mu(r_1 + r_2) = \frac{a}{1-a} \times (1-a) \\ \Rightarrow &\underbrace{(\lambda r_1 + \mu r_2)}_{=0} + (\lambda r_2 + \mu r_1) = a \\ \Rightarrow &\lambda r_2 + \mu r_1 = a. \end{aligned}$$

On a bien $\boxed{\lambda r_2 + \mu r_1 = a}$.

g) La série géométrique $\sum r_1^k$ est convergente car $|r_1| < 1$ et de même la série $\sum r_2^k$ est convergente. Donc $\sum P(Z_k)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k) &= \lambda \times \frac{r_1}{1-r_1} + \mu \times \frac{r_2}{1-r_2}\\ &= \frac{\lambda r_1(1-r_2)+\mu r_2(1-r_1)}{(1-r_1)(1-r_2)}\\ &= \frac{\lambda r_1 + \mu r_2 - r_1 r_2(\lambda+\mu)}{1-(r_1+r_2)+r_1 r_2}\\ &= \frac{a(1-a)\frac{a}{1-a}}{a^2} = 1\end{aligned}$$

On a bien $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k) = 1}$.

On peut en conclure que $\boxed{\text{le motif pp apparait presque sûrement au cours de l'expérience}}$ ou encore que $\boxed{(Z_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est un système quasi-complet d'événements.}}$

3. a) Il faut mettre `while tirage[-lm1 :] != motif1 and tirage[-lm2 :] != motif2:` En effet, la boucle doit s'arrêter dès que l'un des deux booléens prend la valeur `False`, ce qui signifie que l'un des deux motifs est réalisé.

b) La troisième fonction est bien correcte : on effectue N fois un match et pour chaque match on augmente `f1` de 1 si le joueur 1 a gagné et on augmente `f2` de 1 si le joueur 2 a gagné.
La deuxième fonction n'est pas correcte : la première valeur retournée sera bien la valeur attendue pour le joueur 1, mais pas la seconde. En effet quand on passe dans le `elif`, il y a un nouvel appel de la fonction `match_a_2` et donc `f2` ne s'incrémentera pas forcément (alors qu'il le devrait, comme c'est le cas dans la troisième fonction). Ainsi la seconde valeur retournée sera inférieure à ce qu'elle devrait être.
La première fonction est correcte dans le sens où les valeurs retournées sont bien celles attendues, mais comme à chaque passage dans la boucle, on effectue deux fois un appel de la fonction `match_a_2`, c'est comme si on calculait indépendamment les fréquences de réalisation des 2 événements : "le joueur 1 gagne" et "le joueur 2 gagne" (on n'aura donc pas forcément `f1+f2=N` contrairement à la troisième fonction).

c) (i) La seule façon d'obtenir le motif p strictement avant le motif fp est d'obtenir pile au premier lancer.
Donc $\boxed{P(A) = a}$.
Comme les motifs p et fp apparaissent presque sûrement on a $P(A \cup B) = 1$.
De plus les événements A et B sont incompatibles par définition, donc $P(A) + P(B) = 1$ et on en déduit que $\boxed{P(B) = 1 - a}$.

(ii) Bérénice a donc une probabilité de victoire plus grande qu'Alice lorsque $a < \dfrac{1}{2}$.

(iii) Dans la fonction `match_a_2`, dans le cas où les motifs apparaissent au même instant, c'est `'le joueur 1 gagne'` qui est retourné. Ainsi, pour simuler le match entre Alice et Bérénice, Bérénice doit être le joueur 1 et Alice le joueur 2. Il faut donc entrer `match_a_2('fp','p',0.45)`.

d) (i) Comme les motifs pp et fp apparaissent presque sûrement on a $P(B' \cup C) = 1$.
De plus les événements B' et C sont incompatibles car les motifs fp et pp ne peuvent pas apparaitre au même moment.
Donc $\boxed{\text{la famille d'événement } (B', C) \text{ est un système quasi-complet d'événements}}$.

(ii) La seule façon d'obtenir le motif pp avant le motif fp est d'obtenir pile aux deux premiers lancers car sinon, dès que l'on obtient un face au premier ou au deuxième lancer, le motif fp apparaitra nécessairement avant le motif pp.
Donc $\boxed{P(C) = P(\mathrm{p}_1 \cap \mathrm{p}_2) = a^2}$.
Ainsi, Bérénice a une plus grande probabilité de victoire que Candice si, et seulement si $a^2 < \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire, $\boxed{a < \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

4. a) Dans cette question il s'agit de montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{k\geqslant 1} kP(T_k) = \sum_{k\geqslant 1} k\varphi_k(a)$.

Cas où $a = \frac{1}{2}$: sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} k\varphi_k\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{k-1}{2^k} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \\ &\quad \text{somme de série dérivée seconde de série géométrique, convergente car } \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 4.\end{aligned}$$

Cas où $a \neq \frac{1}{2}$: sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} k\varphi_k(a) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{a^k(1-a) - a(1-a)^k}{2a-1} \\ &= \frac{(1-a)a}{2a-1}\sum_{k=1}^{+\infty} ka^{k-1} - \frac{a(1-a)}{2a-1}\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-a)^{k-1} \\ &\quad \text{somme de séries dérivée de séries géométriques, convergentes car } |a| < 1 \text{ et } |1-a| < 1 \\ &= \frac{a(1-a)}{2a-1} \times \left(\frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{(1-(1-a))^2}\right) \\ &= \frac{a(1-a)}{2a-1} \times \frac{2a-1}{a^2(1-a)^2} = \frac{1}{a(1-a)}.\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{\sum_{k\geqslant 1} kP(T_k) \text{ est convergente et } \sum_{k=1}^{+\infty} kP(T_k) = \frac{1}{a(1-a)}.}$ (La formule fonctionne pour $a = \frac{1}{2}$.)

b) On a $kP(Z_k) = \lambda r_1 \times kr_1^{k-1} + \mu r_2 \times kr_2^{k-1}$, or les séries $\sum kr_1^{k-1}$ et $\sum kr_2^{k-1}$ sont convergentes car $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$ (séries géométriques dérivées). Donc $\sum_{k\geqslant 1} kP(Z_k)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} kP(Z_k) &= \lambda r_1 \times \frac{1}{(1-r_1)^2} + \mu r_2 \times \frac{1}{(1-r_2)^2} \\ &= \frac{\lambda r_1(1-r_2)^2 + \mu r_2(1-r_1)^2}{(1-r_1)^2(1-r_2)^2} \\ &= \frac{\lambda r_1 + \mu r_2 - 2r_1r_2(\lambda+\mu) + r_1r_2(\lambda r_2 + \mu r_1)}{a^4} \\ &= \frac{2a^2 - a^2(1-a)}{a^4} = \frac{1+a}{a^2}.\end{aligned}$$

On a donc montré que $\boxed{\sum_{k\geqslant 1} kP(Z_k) \text{ est convergente } \sum_{k=1}^{+\infty} kP(Z_k) = \frac{1+a}{a^2}}$.

c) Le temps d'attente moyen du motif f p est $\sum_{k=1}^{+\infty} kP(T_k)$ et le temps d'attente moyen du motif p p est $\sum_{k\geqslant 1}^{+\infty} kP(Z_k)$.

Donc le temps d'attente moyen du motif f p est supérieur au temps d'attente moyen du motif p p si, et seulement si :

$$\begin{aligned}&\frac{1+a}{a^2} \leqslant \frac{1}{a(1-a)} \\ \Leftrightarrow &\frac{1-a^2}{a} \leqslant 1 \\ \Leftrightarrow &a^2 + a - 1 \geqslant 0\end{aligned}$$

Le trinôme $a^2 + a - 1$ a deux racines réelles $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} > 0 > \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$ donc puisque $a > 0$, on obtient que $a^2 + a - 1 \geqslant 0$ si, et seulement si, $a \geqslant \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Or on a $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}(*)$ donc il est possible de prendre a tel que $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < a < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour une telle valeur de a, la victoire de Bérénice est plus probable que celle de Candice bien que le temps d'attente moyen du motif fp soit supérieur au temps d'attente moyen du motif pp !!

Preuve de $(*)$ (sans calculatrice !) : en élevant au carré les deux termes (positifs), on obtient : $\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4} < \dfrac{1}{2}$ ou encore $2 < \sqrt{5}$ qui est vrai puisque $4 < 5$.