# ENS filière BCPST 2017

Plusieurs parties de ce corrigé sont copiées du corrigé d'un généreux collègue.

## Partie 1 (solutions constantes)

**1-1.** $x_1$, $x_2$, $y_1$ et $y_2$ sont des solutions constantes si, et seulement si :

$$\begin{cases} y_1 = y_2 = 0 \\ (-a_1 + c)x_1 - cx_2 = 0 \\ -cx_1 + (c - a_2)x_2 = 0 \end{cases}.$$

On remarque alors que $x_1$ et $x_2$ sont solution d'un système dont le déterminant est $-(a_1 + a_2)c + a_1a_2$, qui est donc supposé non nul. $x_1$ et $x_2$ sont donc solution d'un système de Cramer dont l'unique solution est la solution évidente $x_1 = x_2 = 0$.

**1-2.** Dans ce cas $x_1$ et $x_2$ sont solution d'un système qui n'est pas de Cramer et qui admet au moins la solution nulle comme solution donc ce système admet une infinité de solutions.

Il y a donc des solutions non nulles.

## Partie 2 ($a_1 = a_2 = 2$, $c = -\frac{3}{2}$)

**2-1.** Supposons $x$ et $y$ solution du système donné. $x$ et $y$ sont alors des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ et on a $x'' = y'$ donc $x$ est bien solution de l'équation différentielle donnée en indication.

L'équation caractéristique de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est $r^2 + 2r + (1 + \omega^2) = 0$. Elle admet deux solutions complexes $-1 \pm \mathrm{i}\omega$.

Il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) \\ y(t) = x'(t) = \mathrm{e}^{-t}\left((B\omega - A)\cos(\omega t) - (A\omega + B)\sin(\omega t)\right) \end{cases}.$$

Avec les conditions initiales on obtient $A = x(0)$ et $B = \dfrac{x(0) + y(0)}{\omega}$.

En résumé si $(x, y)$ est solution du système donné alors

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(x(0)\cos(\omega t) + \dfrac{x(0) + y(0)}{\omega}\sin(\omega t)\right) \\ y(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(y(0)\cos(\omega t) - \dfrac{(1 + \omega^2)x(0) + y(0)}{\omega}\sin(\omega t)\right) \end{cases}}.$$

Réciproquement, ces fonctions sont bien solution du système donné.

**2-2.** Pour la première inégalité il suffit de remarquer que $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ et comme $u$ et $v$ sont positifs, $2uv \geqslant 0$.

Pour la deuxième inégalité $2(u^2 + v^2) - (u + v)^2 = u^2 - 2uv + v^2 = (u - v)^2 \geqslant 0$.

**2-3.** $(X, Y)$ est solution de $\begin{cases} X' = Y \\ Y' = -2X - 2Y \end{cases}$.

D'après la question 2-1 avec $\omega = 1$, on a donc $\boxed{\begin{cases} X(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(X(0)\cos(t) + (X(0) + Y(0))\sin(t)\right) \\ Y(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(Y(0)\cos(t) - (2X(0) + Y(0))\sin(t)\right) \end{cases}}$.

**2-4.** Après calculs on obtient $\begin{cases} X_i' = Y_i \\ Y_i' = -5X_i - 2Y_i \end{cases}$.

D'après la question 2-1 avec $\omega = 2$, on a donc $\boxed{\begin{cases} X_i(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(X_i(0)\cos(2t) + \dfrac{X_i(0) + Y_i(0)}{2}\sin(2t)\right) \\ Y_i(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(Y_i(0)\cos(2t) - \dfrac{5X_i(0) + Y_i(0)}{2}\sin(2t)\right) \end{cases}}$.

**2-5.** Comme $x_i = X_i + X$ et $y_i = Y_i + Y$ on peut en déduire une expression explicite des fonctions $x_1$, $x_2$, $y_1$ et $y_2$ :

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{x_1(0)+x_2(0)}{2}\cos(t) + \frac{x_1(0)+x_2(0)+y_1(0)+y_2(0)}{2}\sin(t)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{x_1(0)-x_2(0)}{2}\cos(2t) + \frac{x_1(0)-x_2(0)+y_1(0)-y_2(0)}{4}\sin(2t)\right)\\
x_2(t) &= \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{x_1(0)+x_2(0)}{2}\cos(t) + \frac{x_1(0)+x_2(0)+y_1(0)+y_2(0)}{2}\sin(t)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{x_2(0)-x_1(0)}{2}\cos(2t) + \frac{x_2(0)-x_1(0)+y_2(0)-y_1(0)}{4}\sin(2t)\right)\\
y_1(t) &= \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{y_1(0)+y_2(0)}{2}\cos(t) - \frac{2x_1(0)+2x_2(0)+y_1(0)+y_2(0)}{2}\sin(t)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{y_1(0)-y_2(0)}{2}\cos(2t) - \frac{5x_1(0)-5x_2(0)+y_1(0)-y_2(0)}{4}\sin(2t)\right)\\
y_2(t) &= \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{y_1(0)+y_2(0)}{2}\cos(t) - \frac{2x_1(0)+2x_2(0)+y_1(0)+y_2(0)}{2}\sin(t)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{y_2(0)-y_1(0)}{2}\cos(2t) - \frac{5x_2(0)-5x_1(0)+y_2(0)-y_1(0)}{4}\sin(2t)\right)
\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité triangulaire et au fait que les fonctions sinus et cosinus sont bornées par 1, on a par exemple :

$$|x_1(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{7}{4}|x_1(0)| + \frac{7}{4}|x_2(0)| + \frac{3}{4}|y_1(0)| + \frac{3}{4}|y_2(0)|\right).$$

On procède de même pour $x_2$, et pour $y_1$ et $y_2$ on obtient :

$$|y_i(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{9}{4}|x_1(0)| + \frac{9}{4}|x_2(0)| + \frac{7}{4}|y_1(0)| + \frac{7}{4}|y_2(0)|\right).$$

On a donc

$$|x_1(t)| + |x_2(t)| + |y_1(t)| + |y_2(t)| \leqslant 8\mathrm{e}^{-t}(|x_1(0)| + |x_2(0)| + |y_1(0)| + |y_2(0)|).$$

**2-6.** On a :

$$\begin{aligned}
x_1^2(t)+x_2^2(t)+y_1^2(t)+y_2^2(t) &\leqslant (|x_1(t)|+|x_2(t)|)^2 + (|y_1(t)|+|y_2(t)|)^2 \quad \text{d'après 2-2}\\
&\leqslant (|x_1(t)|+|x_2(t)|+|y_1(t)|+|y_2(t)|)^2 \quad \text{d'après 2-2}\\
&\leqslant 64\mathrm{e}^{-2t}(|x_1(0)|+|x_2(0)|+|y_1(0)|+|y_2(0)|)^2 \quad \text{d'après 2-5}\\
&\leqslant 128\mathrm{e}^{-2t}\left((|x_1(0)|+|x_2(0)|)^2 + (|y_1(0)|+|y_2(0)|)^2\right) \quad \text{d'après 2-2}\\
&\leqslant 256\mathrm{e}^{-2t}\left(|x_1(0)|^2+|x_2(0)|^2+|y_1(0)|^2+|y_2(0)|^2\right) \quad \text{d'après 2-2}
\end{aligned}$$

*Attention les deux constantes $C$ de l'énoncé ne sont pas les mêmes, ce qui peut être déstabilisant...*

**2-7.** Dans cet exemple

$$\begin{aligned}
x_1(t) = x_2(t) &= \mathrm{e}^{-t}\left((1+\sqrt{5})\cos(t) + (3+\sqrt{5})\sin(t)\right)\\
y_1(t) = y_2(t) &= \mathrm{e}^{-t}\left(2\cos(t) - (4+2\sqrt{5})\sin(t)\right)
\end{aligned}$$

L'astuce consiste ici à calculer explicitement $x_i^2 + y_i^2$. Le choix des conditions initiales fait que le terme en $\cos(t)\sin(t)$ s'annule ($(1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) - 2(4+2\sqrt{5}) = 0$).
On a donc l'existence de deux réels non nuls $\alpha$ et $\beta$ tels que

$$x_1^2(t)+x_2^2(t)+y_1^2(t)+y_2^2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\left(\alpha^2\cos^2(t) + \beta^2(t)\sin^2(t)\right).$$

En posant alors $D = \dfrac{\min(\alpha^2,\beta^2)}{x_1^2(0)+x_2^2(0)+y_1^2(0)+y_2^2(0)} > 0$, on obtient l'inégalité demandée.

## Partie 3

**3-1.** La première inégalité provient tout simplement de $\left(\sqrt{\varepsilon}x + \dfrac{y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \geqslant 0$ et la deuxième inégalité provient de $\left(\sqrt{\varepsilon}x - \dfrac{y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \geqslant 0$.

**3-2.** D'après la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$ :

$$(\alpha - \varepsilon)x^2 + \left(\beta - \frac{1}{\varepsilon}\right) y^2 \leqslant \alpha x^2 + 2xy + \beta y^2 \leqslant (\alpha + \varepsilon)x^2 + \left(\beta + \frac{1}{\varepsilon}\right) y^2.$$

On se fixe alors $\varepsilon_0$ tel que $\dfrac{1}{\beta} < \varepsilon_0 < \alpha$. Ceci est possible grâce à l'hypothèse $\alpha\beta > 1$ qui permet d'avoir $\dfrac{1}{\beta} < \alpha$ et donc on peut trouver un réel entre ces deux nombres.
On cherche alors $C$ tel que

$$C \geqslant \alpha + \varepsilon_0, \quad C \geqslant \beta + \frac{1}{\varepsilon_0}, \quad \frac{1}{C} \leqslant \alpha - \varepsilon_0, \quad \frac{1}{C} \leqslant \beta - \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Il suffit donc de prendre $C = \max\left(\alpha + \varepsilon_0, \beta + \dfrac{1}{\varepsilon_0}, \dfrac{1}{\alpha - \varepsilon_0}, \dfrac{1}{\beta - \frac{1}{\varepsilon_0}}\right)$.

**3-3.** Pour tout $t \geqslant 0$ :

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \sum_{i=1}^{2} \big(\alpha_i x_i(t) x_i'(t) + x_i'(t) y_i(t) + x_i y_i'(t) + \beta y_i(t) y_i'(t)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{2} \big(\alpha_i y_i x_i + y_i^2 + (x_i + \beta y_i) y_i'\big) \\
&= \sum_{i=1}^{2} \big(\alpha_i y_i x_i + y_i^2\big) + (x_1 + \beta y_1) y_1' + (x_2 + \beta y_2) y_2' \\
&= \sum_{i=1}^{2} \big(\alpha_i y_i x_i + y_i^2\big) - a_1 x_1^2 - 2x_1 y_1 + c(x_1^2 - x_1 x_2) - a_1 \beta x_1 y_1 - 2\beta y_1^2 + \beta c(x_1 y_1 - x_2 y_1) \\
&\qquad - a_2 x_2^2 - 2x_2 y_2 + c(x_2^2 - x_1 x_2) - a_2 \beta x_2 y_2 - 2\beta y_2^2 + \beta c(x_2 y_2 - x_1 y_2) \\
&= \sum_{i=1}^{2} \left[(-a_i + c) x_i^2 + (\alpha_i - 2 - a_i \beta + c\beta) x_i y_i + (1 - 2\beta) y_i^2\right] - 2c x_1 x_2 - \beta c (x_2 y_1 + x_1 y_2)
\end{aligned}$$

D'après 3-1 avec $2 \times x_1 \times \dfrac{-\beta c y_2}{2}$, on a :

$$-\beta c x_1 y_2 \leqslant \varepsilon x_1^2 + \frac{\beta^2 c^2 y_2^2}{4\varepsilon}.$$

De même pour $-\beta c x_2 y_1$.
Et on a aussi $-2c x_1 x_2 \leqslant |c| \times 2|x_1 x_2| \leqslant |c|(x_1^2 + x_2^2)$.
En réunissant tout cela, on obtient bien :

$$f'(t) \leqslant \sum_{i=1}^{2} \left[-(a_i - c - |c| - \varepsilon) x_i^2 + (\alpha_i - 2 - a_i \beta + c\beta) x_i y_i - \left(2\beta - 1 - \frac{\beta^2 c^2}{4\varepsilon}\right) y_i^2\right].$$

**3-4.** Considérons dans un premier temps, comme le suggère l'énoncé, le cas particulier $c = 0$. On choisit $\beta > 1/2$, de sorte que l'inégalité (1) soit satisfaite.
On choisit alors, pour tout $i \in \{1, 2\}$, $\alpha_i = 2 + a_i \beta$, de sorte que l'identité (2) soit satisfaite. Ces choix des nombres $\alpha_i$ et $\beta$ garantissent que les inégalités (3) sont satisfaites. La stricte positivité des réels $a_i$ justifie l'existence d'un réel strictement positif $\varepsilon$ satisfaisant les inégalités (4).

Traitons maintenant le cas $c \neq 0$. Fixons, comme le suggère aimablement l'énoncé,

$$\beta = \frac{4\varepsilon}{c^2}, \quad \alpha_i = 2 + \beta(a_i - c) \text{ pour } i \in \{1,2\} \text{ et } \varepsilon \in \left]\frac{c^2}{4}, a\right[ \text{ si } c < 0, \varepsilon \in \left]\frac{c^2}{4}, a - 2c\right[ \text{ si } c > 0.$$

- Observons d'abord que l'écriture $\left]\frac{c^2}{4}, a\right[$ dans le cas $c < 0$ et $\left]\frac{c^2}{4}, a - 2c\right[$ dans le cas $c > 0$ a bien un sens, autrement dit on a bien $\frac{c^2}{4} < a$ si $c < 0$ et $\frac{c^2}{4} < a - 2c$ si $c > 0$ compte tenu de l'hypothèse $-2\sqrt{a} < c < 2\sqrt{4+a} - 2$. En effet,
  - dans le cas $c < 0$, $-2\sqrt{a} < c < 0$ implique $c^2 < 4a$ ;
  - dans le cas $c > 0$, $0 < c < 2\sqrt{4+a} - 4$ implique $c^2 < 4(4+a) - 16\sqrt{4+a} + 16$, ou encore $\frac{c^2}{4} < 8 + a - 4\sqrt{4+a} < a - 2c$.
- On a d'abord $2\beta - 1 - \frac{\beta^2 c^2}{4\varepsilon} = \frac{4\varepsilon}{c^2} - 1$, qui est bien strictement positif d'après le choix de $\varepsilon$ fait ci-dessus. L'inégalité (1) est donc vérifiée.
- Le choix de $\alpha_i$ garantit que les identités (2) sont satisfaites.
- Procédons par disjonction de cas pour vérifier les inégalités (4).
  - Premier cas : $c \geq 0$. On a alors choisi $\varepsilon$ de sorte que l'on ait, pour tout $i \in \{1,2\}$, $\varepsilon < a - 2c = a - c - |c| \leq a_i - c - |c|$, ce qui est l'inégalité souhaitée.
  - Deuxième cas : $c < 0$. On a alors choisi $\varepsilon$ de sorte que l'on ait, pour tout $i \in \{1,2\}$, $\varepsilon < a = a - c - |c| \leq a_i - c - |c|$, ce qui est l'inégalité souhaitée.
- Pour tout $i \in \{1,2\}$, on a, d'après le choix de $\beta$ fait ci-dessus,

  $$\alpha_i \beta = \frac{8\varepsilon}{c^2} + \frac{16\varepsilon}{c^4}(a_i - c) \geq \frac{8\varepsilon}{c^2} + \frac{16\varepsilon}{c^4}\left(\frac{c^2}{4} + |c|\right).$$

  L'inégalité (4) implique $a_i - c > 0$,ce qui fournit la stricte positivité des réels $\alpha_i$ et aussi la minoration

  $$\alpha_i \beta > \frac{8\varepsilon}{c^2}.$$

  Enfin, le choix de $\varepsilon$ fait ci-dessus implique que le membre de droite de cette dernière inégalité est supérieur ou égal é 2 :

  $$\alpha_i \beta > 2.$$

  Les inégalités (3) sont donc satisfaites.

Les choix suggérés par l'énoncé suffisent donc à réaliser les inégalités (1), (2), (3) et (4).

**3-5.** Avec les coefficients de 3-4, la question 3-3 devient

$$f'(t) \leqslant -\sum_{i=1}^{2} \left[ \underbrace{(a_i - c - |c| - \varepsilon)}_{A_i > 0} x_i^2 + \underbrace{\left(2\beta - 1 - \frac{\beta^2 c^2}{4\varepsilon}\right)}_{B_i > 0} y_i^2 \right].$$

Notons $m = \min(A_1, A_2, B_1, B_2)$, (*attention au signe $-$ devant la somme...*) on a

$$f'(t) \leqslant -m \sum_{i=1}^{2} (x_i^2 + y_i^2).$$

Mais on peut aussi remarquer, grâce à la question 3-2 (utilisable grâce aux condition (3) de la question précédente) que il existe $C$ tel que : (*on applique deux fois la question 3-2, on prend le max des deux constantes fabriquées)*

$$f(t) \leqslant \frac{C}{2} \sum_{i=1}^{2} (x_i^2 + y_i^2)$$

On a alors

$$f'(t) \leqslant -\frac{2m}{C}\frac{C}{2}\sum_{i=1}^{2}(x_i^2+y_i^2) \leqslant -\frac{2m}{C}f(t),$$

car $m$ et $C$ sont strictement positifs.
On a alors *(astuce très classique)* :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{Kt}f(t)\right) = \mathrm{e}^{Kt}(f'(t)+Kf(t)) \leqslant 0.$$

Donc la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{Kt}f(t)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc :

$$\mathrm{e}^{Kt}f(t) \leqslant f(0) \Leftrightarrow f(t) \leqslant f(0)\mathrm{e}^{-Kt}.$$

**3-6.** D'après 3-2, il existe $C>0$ tel que :

$$f(t) \geqslant \frac{1}{2C}(x_1^2(t)+x_2^2(t)+y_1^2(t)+y_2^2(t)).$$

Avec l'autre morceau de l'inégalité de 3-2, on a aussi $f(t) \leqslant \frac{C}{2}\sum_{i=1}^{2}(x_i^2+y_i^2)$, donc

$$f(0) \leqslant \frac{C}{2}(x_1^2(0)+x_2^2(0)+y_1^2(0)+y_2^2(0)).$$

Ainsi le résultat de la question précédente nous donne :

$$x_1^2(t)+x_2^2(t)+y_1^2(t)+y_2^2(t) \leqslant C^2\mathrm{e}^{-Kt}(x_1^2(0)+x_2^2(0)+y_1^2(0)+y_2^2(0)).$$

## Partie 4

**4-1.** *Attention, l'énoncé a recours ici à des dérivées de fonctions à valeurs complexes, qui ne figurent plus au programme, et à la résolution d'équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients complexes... Heureusement, le candidat peut appliquer sans problème (et sans trop réfléchir !) les résultats qu'il connait sur les équations différentielles du premier ordre à coefficients réels...*

**Premier cas :** on suppose la matrice $M$ diagonale, à coefficients complexes. Notons $\lambda_1,\ldots,\lambda_d$ ses coefficients diagonaux.

Pour tout $k \in [\![1,d]\!]$, la fonction $z_k : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ est solution de l'équation différentielle $z_k' = \lambda_k z_k$ si et seulement si il existe un nombre complexe $C_k$ vérifiant :

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad z_k(t) = C_k\mathrm{e}^{\lambda_k t}.$$

En évaluant en $t=0$, on obtient $C_k = z_k(0)$, d'où :

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad z_k(t) = z_k(0)\mathrm{e}^{\lambda_k t} = z_k(0)\exp\left(\mathrm{Re}(\lambda_k)t\right)\exp\left(\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\lambda_k)t\right).$$

On obtient ainsi facilement le module de $z_k(t)$, pour tout $t \geqslant 0$,

$$|z_k(t)| = |z_k(0)|\exp\left(\mathrm{Re}(\lambda_k)t\right).$$

Par hypothèse, toutes les parties réelles des nombres $\lambda_k$ sont majorées par $\lambda$. Par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on obtient, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\boxed{|z_k(t)| \leqslant |z_k(0)|\mathrm{e}^{\lambda t}}.$$

qui implique bien entendu l'inégalité demandée, en choisissant par exemple $C=1$.

**Cas général :** la matrice $M$ n'est pas nécessairement diagonale mais, par hypothèse, elle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Par conséquent, il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ diagonale vérifiant $M = PDP^{-1}$.

Pour tout $t \geqslant 0$, notons $Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_d(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ et $Z'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ \vdots \\ z_d'(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$. L'application $Z$ (à valeurs vectorielles) est solution du système différentiel :

$$\forall t \geqslant 0, \quad Z'(t) = MZ(t)$$

si et seulement si elle vérifie le système suivant :

$$\forall t \geqslant 0, \quad P^{-1}Z'(t) = DP^{-1}Z(t) \qquad (S_d)$$

Notons, pour tout $t \geqslant 0$, $\widetilde{Z}(t) = P^{-1}Z(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{z_1}(t) \\ \vdots \\ \widetilde{z_d}(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C})$.

**Remarque :** l'application $Z$ est à valeurs réelles, mais l'application $\widetilde{Z}$ peut prendre des valeurs complexes non réelles.
Notons enfin, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\widetilde{Z}'(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{z_1}'(t) \\ \vdots \\ \widetilde{z_d}'(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{C}).$$

Notons $P^{-1} = (Q_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$. On a, pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, $\widetilde{z_i} = \sum_{j=1}^{d} Q_{i,j} z_j$, donc

$$\widetilde{z_i}' = \sum_{j=1}^{d} Q_{i,j} z_j'$$

d'où

$$\widetilde{Z}'(t) = P^{-1}Z'(t).$$

Le système différentiel $(S_d)$ ci-dessus équivaut donc au système suivant :

$$\forall t \geqslant 0, \quad \widetilde{Z}'(t) = D\widetilde{Z}(t).$$

On utilise alors le résultat du cas particulier étudié au début de cette question 4-1 ; on est en mesure de majorer les module des fonctions $|\widetilde{z_k}|$, pour tout $k \in [\![1, d]\!]$ :

$$\forall t \geqslant 0, \quad |\widetilde{z_k}(t)| \leqslant |\widetilde{z_k}(0)| \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

La relation $Z = P\widetilde{Z}$ implique, en notant $P = (P_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$,

$$\forall i \in [\![1, d]\!], \forall t \geqslant 0, \quad z_i(t) = \sum_{j=1}^{d} P_{i,j} \widetilde{z_j}(t)$$

L'inégalité triangulaire implique :

$$\forall i \in [\![1, d]\!], \forall t \geqslant 0, \quad |z_i(t)| \leqslant \sum_{j=1}^{d} |P_{i,j}||\widetilde{z_j}(t)|.$$

En majorant les nombres $|\widetilde{z_j}(t)|$ comme ci-dessus, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, d]\!], \forall t \geqslant 0, \quad |z_i(t)| \leqslant \sum_{j=1}^{d} |P_{i,j}||\widetilde{z_j}(0)| \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Il suffit de poser $K_1 = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant d} |P_{i,j}| > 0$ (en effet, la matrice $P$ est inversible, donc n'est pas constamment nulle) pour obtenir l'inégalité :

$$\forall i \in [\![1,d]\!],\ \forall t \geqslant 0, \quad |z_i(t)| \leqslant K_1 \left(\sum_{j=1}^{d} |\widetilde{z}_j(0)|\right) \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

On utilise ensuite la relation $\widetilde{Z} = P^{-1}Z$ pour exprimer chacun des nombres complexes $\widetilde{z}_i(0)$ comme combinaison linéaire des nombres $z_j(0)$. Pour cela, notons $P^{-1} = (Q_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$. On a, pour tout $i \in [\![1,d]\!]$,

$$\widetilde{z}_i(0) = \sum_{j=1}^{d} Q_{i,j} z_j(0).$$

Il résulte de l'inégalité triangulaire :

$$|\widetilde{z}_i(0)| \leqslant \sum_{j=1}^{d} |Q_{i,j}||z_j(0)|.$$

Notons $K_2 = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant d} |Q_{i,j}| > 0$. On obtient, pour tout $i \in [\![1,d]\!]$,

$$|\widetilde{z}_i(0)| \leqslant K_2 \sum_{j=1}^{d} |z_j(0)|.$$

En rassemblant les dernières inégalités obtenues, on obtient :

$$\forall i \in [\![1,d]\!],\ \forall t \geqslant 0, \quad |z_i(t)| \leqslant dK_1K_2 \left(\sum_{j=1}^{d} |z_j(0)|\right) \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

$\boxed{\text{Il suffit de poser } C = dK_1K_2 > 0}$ pour obtenir l'inégalité souhaitée :

$$\boxed{\forall i \in [\![1,d]\!],\ \forall t \geqslant 0, \quad |z_i(t)| \leqslant C \left(\sum_{j=1}^{d} |z_j(0)|\right) \mathrm{e}^{\lambda t}}.$$

**4-2.** Il suffit de prendre $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c-a_1 & -c & -2 & 0 \\ -c & c-a_2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

**4-3.** $N = \begin{pmatrix} c-a_1 & -c \\ -c & c-a_2 \end{pmatrix}$.

**4-4.** $N$ est symétrique à coefficients réels donc $N$ est diagonalisable.
$\det(N - \lambda I_2) = \lambda^2 - (2c - a_1 - a_2)\lambda + a_1a_2 - c(a_1+a_2)$.
On cherche les racines de ce polynôme en $\lambda$. Le discriminant de ce trinôme est :

$$\Delta = 4c^2 + (a_1 - a_2)^2 \geqslant 0$$

Donc $n_- = \dfrac{2c - (a_1+a_2) - \sqrt{4c^2 + (a_1-a_2)^2}}{2}$ et $n_+ = \dfrac{2c - (a_1+a_2) + \sqrt{4c^2 + (a_1-a_2)^2}}{2}$.

**4-5.** *On pourra remarquer encore un sujet qui confond $\mathbb{K}^n$ et les matrices colonnes....*

On note $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ et enfin $X = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

On a

$$MX = mX \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = mu_1 \\ v_2 = mu_2 \\ (c-a_1)u_1 - cu_2 - 2v_1 = mv_1 \\ -cu_1 + (c-a_2)u_2 - 2v_2 = mv_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = mu_1 \\ v_2 = mu_2 \\ (c-a_1)u_1 - cu_2 = m(m+2)u_1 \\ -cu_1 + (c-a_2)u_2 = m(m+2)u_2 \end{cases}.$$

On remarque alors que les deux dernière lignes du système sont équivalentes à $N\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = m(m+2)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

On a donc bien le résultat demandé en remarquant que $u$ est forcément non nul car $v = mu$ donc si $u$ est nul alors $v$ et nul et $(u, v)$ est nul et donc ne peut pas être un vecteur propre !

**4-6.** Considérons les polynômes $P_- = X^2 + 2X - n_-$ et $P_+ = X^2 + 2X - n_+$.
D'après 4-5, le spectre de la matrice $M$ est égal à la réunion de l'ensemble $P_-^{-1}(\{0\})$ des racines du polynôme $P_-$ et de l'ensemble $P_+^{-1}(\{0\})$ des racines du polynôme $P_+$.
Observons que $-1$ est racine du polynôme $P_-$ (respectivement $P_+$) si, et seulement si, on a $n_- = -1$ (respectivement $n_+ = -1$).

- Supposons $-1 \notin P_-^{-1}(\{0\}) \cup P_+^{-1}(\{0\})$, c'est-à-dire $n_- \neq -1$ et $n_+ \neq -1$. Chacun des polynômes $P_-$ et $P_+$ admet alors deux racines (complexes) distinctes.
  - Supposons que $P_-^{-1}(\{0\})$ et $P_+^{-1}(\{0\})$ soient disjoints. La matrice $M$ admet alors 4 valeurs propres distinctes ; comme c'est une matrice d'ordre 4, elle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$.
  - Supposons que $P_-^{-1}(\{0\})$ et $P_+^{-1}(\{0\})$ ne soient pas disjoints. Soit $z$ une racine commune aux polynômes $P_-$ et $P_+$. On a $n_- - n_+ = P_+(z) - P_-(z) = 0 - 0 = 0$, d'où $n_- = n_+$, c'est-à-dire $P_- = P_+$ Ceci implique, compte tenu du résultat de la question 4-4, $c = 0$ et $a_1 = a_2$. La matrice $N$ est alors égale à la matrice $-a_1 I_2$, donc tout vecteur non nul de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ est vecteur propre de la matrice $N$.

    Notons $m_1$ et $m_2$ les deux racines distinctes (on rappelle que cela découle du fait que $-1$ n'est pas racine de $P_-$) du polynôme $P_- = P_+$. D'après le résultat de la question 4-5, chacun des 4 vecteurs $W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice $M$. On constate immédiatement que les vecteurs $W_1$ et $W_3$ ne sont pas colinéaires ; par conséquent, on est en mesure de minorer la dimension de chacun des espaces propres de la matrice $M$ : $\dim E_{m_1}(M) \geqslant \mathrm{rg}(W_1, W_3) = 2$ et $\dim E_{m_2}(M) \geqslant \mathrm{rg}(W_2, W_4) = 2$. On en déduit :

    $$\dim E_{m_1}(M) + \dim E_{m_2}(M) \geqslant 4 = \dim \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C}).$$

    Ceci implique que la matrice $M$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$.

- Supposons $-1 \in P_-^{-1}(\{0\}) \cup P_+^{-1}(\{0\})$. Ainsi, l'un au moins des polynômes $P_-$ et $P_+$ admet une racine double. Supposons, par exemple, que le polynôme $P_-$ admette une seule racine ; autrement dit, on suppose $n_- = -1$ (on traiterait l'autre cas de façon analogue).
  - Supposons que les deux valeurs propres $n_- = -1$ et $n_+$ de la matrice $N$ soient distinctes. L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ admet donc exactement deux droites vectorielles de vecteurs propres de $N$, notées $\mathrm{Vect}(u_-)$ et $\mathrm{Vect}(u_+)$, où $u_- \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ (respectivement $u_+$) est un vecteur propre de le matrice $N$ associé à la valeur propre $n_- = -1$ (respectivement $n_+$).

    Notons $m_1$ et $m_2$ les deux racines (éventuellement confondues) du polynôme $P_+$. D'après le résultat de la question 4-5, les vecteurs propres de la matrice $M$ sont tous colinéaires aux vecteurs $\begin{pmatrix} u_- \\ -u_- \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_+ \\ m_1 u_+ \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_+ \\ m_2 u_+ \end{pmatrix}$. Ainsi, la somme des dimensions des espaces propres de la matrice $M$ est inférieure ou égale à 3, donc strictement inférieure à $4 = \dim \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$. Ceci prouve que la matrice $M$ n'est pas diagonalisable.

— Supposons que les valeurs propres $n_- = -1$ et $n_+$ de la matrice $N$ soient égales, autrement dit supposons que l'on ait $n_- = n_+ = -1$. Ainsi, on a $c = 0$ et $a_1 = a_2$. Le spectre de la matrice $M$ est égal à $P_-^{-1}(\{0\}) \cup P_+^{-1}(\{0\}) = \{-1\}$. Toute matrice colonne de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ non nulle est vecteur propre de $N$. D'aprés le résultat de la question 4-5, les vecteurs propres de la matrice $M$ sont exactement les matrices colonnes $\begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix}$, où $u$ est une matrice colonne non nulle de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. Ainsi, tout vecteur propre de la matrice $M$ est inclus dans le sous-espace vectoriel $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C}) / x + y + z + t = 0 \right\}$ de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$. L'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres de la matrice $M$ est donc inclus dans le sous-espace $F$, qui est strictement inclus dans $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$. Ainsi, l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ n'admet pas de famille génératrice formée de vecteurs propres de la matrice $M$, donc la matrice $M$ n'est pas diagonalisable.

On vient d'établir l'équivalence souhaitée : la matrice $M$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ si, et seulement si, les valeurs propres $n_-$ et $n_+$ sont toutes deux différentes de $-1$.

**4-7.** On suppose ici les valeurs propres $n_-$ et $n_+$ différentes de $-1$. D'après 4-6, la matrice $M$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$. Soit $\lambda$ le maximum des parties réelles des valeurs propres de la matrice $M$. D'après le résultat de la question 4-1, il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $t \geqslant 0$, on ait :

$$|x_1(t)| + |y_1(t)| + |x_2(t)| + y_2(t)| \leq 4C(|x_1(0)| + |y_1(0)| + |x_2(0)| + |y_2(0)|)\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Utilisons de nouveau trois fois successivement l'inégalité de gauche de la question 2-2, pour tout $t \geqslant 0$,

$$x_1(t)^2 + y_1(t)^2 + x_2(t)^2 + y_2(t)^2 \leq (|x_1(t)| + |y_1(t)| + |x_2(t)| + y_2(t)|)^2$$

(remarquons qu'il n'est pas indispensable d'invoquer ici 2-2 puisque cette inégalité est évidente en développant le carré du membre de droite...). On a donc, pour tout $t \geqslant 0$,

$$x_1(t)^2 + y_1(t)^2 + x_2(t)^2 + y_2(t)^2 \leq 16C^2(|x_1(0)| + |y_1(0)| + |x_2(0)| + |y_2(0)|)^2\mathrm{e}^{2\lambda t}.$$

Utilisons de nouveau trois fois successivement l'inégalité de droite de la question 2-2, pour tout $t \geqslant 0$,

$$x_1(t)^2 + y_1(t)^2 + x_2(t)^2 + y_2(t)^2 \leq 16C^2 4(x_1(0)^2 + y_1(0)^2 + x_2(0)^2 + y_2(0)^2)\mathrm{e}^{2\lambda t}.$$

Il suffit de poser $C' = 64C^2 > 0$ pour obtenir l'inégalité souhaitée :

$$\forall t \geqslant 0, \quad x_1(t)^2 + y_1(t)^2 + x_2(t)^2 + y_2(t)^2 \leq C'(x_1(0)^2 + y_1(0)^2 + x_2(0)^2 + y_2(0)^2)\mathrm{e}^{2\lambda t}.$$

On peut préciser la valeur du réel $\lambda$. Calculons pour cela les valeurs propres de la matrice $M$, c'est-édire les racines des polynômes $P_-$ et $P_+$. Ces polynômes admettent respectivement pour discriminants $\Delta_- = 4(1 + n_-)$ et $\Delta_+ = 4(1 + n_+)$.

- Supposons $n_+ < -1$. On a alors $\Delta_+ < 0$ et $\Delta_- < 0$. Les valeurs propres de la matrice $M$ sont donc les nombres complexes $-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{-1 - n_-}$ et $-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{-1 - n_+}$.
  Le maximum des parties réelles des valeurs propres de la matrice $M$ est donc $\lambda = -1$.
- Supposons $n_+ > -1$ (rappelons que, dans toute cette question 4-7, chacun des nombres $n_+$ et $n_-$ est différent de $-1$). On a alors $\Delta_+ > 0$. Les valeurs propres de la matrice $M$ sont alors les nombres réels $-1 \pm \sqrt{1 + n_+}$ et, si $\Delta_-$ est strictement positif, les réels $-1 \pm \sqrt{1 + n_-}$, et si $\Delta_-$ est strictement négatif, les nombres complexes $-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{-1 - n_-}$. Dans tous les cas,
  Le maximum des parties réelles des valeurs propres de $M$ est donc $\lambda = -1 + \sqrt{1 + n_+}$.

**Remarque.** On peut calculer $n_-$ et $n_+$ pour les valeurs choisies par l'énoncé é la partie 2 : $a_1 = a_2 = 2$, $c = -3/2$. On obtient $n_- = -5$ et $n_+ = -2$, puis $\lambda = -1$. On déduit de 4-7 l'existence d'un réel $C > 0$ tel que, pour toute solution $(x_1, y_1, x_2, y_2)$ de $(*)$, on a :

$$\forall t \geqslant 0, \quad x_1(t)^2 + y_1(t)^2 + x_2(t)^2 + y_2(t)^2 \leq C(x_1(0)^2 + y_1(0)^2 + x_2(0)^2 + y_2(0)^2)\mathrm{e}^{-2t}.$$

On retrouve bien une inégalité du type de celle obtenue é la question 2-6.

**Partie 5**
On peut remarquer que

- Le résultat de la partie 1 est extrêmement particulier : on n'a étudié que les solutions constantes.
- Le résultat de la partie 2 ne concerne qu'un seul triplet $(a_1, a_2, c)$. Dans ce cas, là encore très particulier, on a pu établir, dans les questions 2-6 et 2-7, que la norme euclidienne du vecteur $(x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t))$ tend vers 0 quand $t$ tend vers $+\infty$ « au même rythme » que l'exponentielle décroissante $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ ; plus précisément, la dernière inégalité obtenue à la partie 2 montre que l'on ne peut pas espérer une décroissante plus rapide que de l'ordre de $t \longmapsto e^{-t}$ pour la fonction $t \longmapsto \|(x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t))\|$.

- Le résultat de la partie 3 est valable dans un cadre beaucoup plus général, mais il nécessite tout de même de supposer $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ et $c$ compris strictement entre $-2\sqrt{a}$ et $2\sqrt{4+a} - a$. Sous ces hypothèses, on est parvenu à démontrer que la norme euclidienne du vecteur $(x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t))$ tend vers 0 quand $t$ tend vers $+\infty$ « au moins aussi vite » qu'une exponentielle décroissante. On n'a pas établi d'encadrement ; c'est donc un résultat moins précis que celui de la partie 2, mais établi sous des hypothèses beaucoup plus générales.

- Le résultat de la partie 4 est obtenu pour des coefficients $a_1$, $a_2$ et $c$ quelconques, avec pour seule restriction le fait que les valeurs propres de la matrice $N$ soient toutes deux différentes de $-1$. C'est donc un résultat beaucoup plus général que les précédents. En revanche, l'inégalité obtenue peut être, dans certains cas, beaucoup moins précise : en effet, si le réel $\lambda$ est strictement positif, on a seulement établi que la norme euclidienne du vecteur $(x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t))$ tend vers $+\infty$ « au pire aussi vite » qu'une exponentielle croissante...

En conclusion, chacun de ces résultats propose un point de vue intéressant.