

Programme de colle de la semaine n° 19

17 au 21 février 2025

Algèbre : Réduction des endomorphismes et des matrices

- Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres : définitions et plusieurs caractérisations (en passant par le noyau, le caractère injectif ou inversible,...)
- Famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre
- Une famille obtenue en juxtaposant des bases de sous-espaces propres est libre.
- En dimension finie : famille de n vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est une base (notion de base de vecteurs propres), f ou A admet au plus n valeurs propres, f et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ ont les mêmes valeurs propres, deux matrices semblables ont donc les mêmes valeurs propres.
- Méthodes de recherche de valeurs propres en cherchant les scalaires λ tels que $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$.
- Matrice ou endomorphisme diagonalisable : définition, f (ou A) est diagonalisable ssi la somme des dimensions des sous-espaces propre est égale à $\dim(E)$ (ou n), si f (ou A) admet $\dim(E)$ (ou n) valeurs propres distinctes alors f (ou A) est diagonalisable, toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable, méthode pour diagonaliser une matrice ou un endomorphisme.
- Application de la réduction au calcul de puissances de matrices.

Les **démonstrations exigibles** sont les suivantes :

- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ alors :
 - * $\lambda \in \text{sp}(f) \iff \lambda \in \text{sp}(A)$.
 - * $\vec{u}$ est un vecteur propre de $f \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u})$ est un vecteur propre de A .
- Si $A = PBP^{-1}$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$.

Révisions sur les VAR discrètes ou finies

Exercices

Probabilités : Couples de VAR discrètes ou finies

- Généralités : loi du couple (ou loi conjointe), lois marginales d'un couple, loi conditionnelle. Méthode pour passer de l'une à l'autre.
- Calculs de probabilités du type $P(u(X, Y) \in I)$.

À venir : fin des couples de VAR discrètes, révisions de géométrie, produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.