Devoir maison n$^{\text{o}}$ 10

À rendre le 19 décembre 2025

Sujet d'oral Agro-véto 2025

Question de cours
Énoncer le lemme des coalitions

Exercice avec préparation

1. On considère les équations différentielles suivantes, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} (H) & y'' - 4y' + 5y = 0, \\ (E) & y'' - 4y' + 5y = 2 - \mathrm{e}^{2x}. \end{array}$$

   a) Déterminer l'ensemble des solutions de (H).
   b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
   On pourra chercher une solution particulière y_0 de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 5y = -\mathrm{e}^{2x}$$

   sous la forme $y_0 : x \mapsto c\mathrm{e}^{2x}$, où c est un réel à déterminer.

2. Pour tout réel x, on note $C(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\cos(t)\ \mathrm{d}t$ et $S(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\sin(t)\ \mathrm{d}t$.
   a) Montrer que, pour tout x réel, $C(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}\cos(x) - 1}{2} + \dfrac{1}{2}S(x)$ et $S(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}\sin(x)}{2} - \dfrac{1}{2}C(x)$.
   b) En déduire une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\cos(x)$ et une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Écrire une fonction en langage Python, nommée `intC`, prenant en paramètres un réel `x` et un entier `nb_pas`, qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\cos(t)\ \mathrm{d}t$ obtenue à l'aide de la méthode des rectangles. L'intervalle $[0;x]$ doit être découpe en `nb_pas` intervalles de même longueur.

Dans toute la suite, on note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On considère les quatre fonctions suivantes de E :

$$f_1 \ :\ x \mapsto 1, \qquad f_2 \ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{2x}, \qquad f_3 \ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\cos(x), \qquad f_4 \ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\sin(x).$$

On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

4. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F.

5. On note u l'application définie sur F par $u(f) = f'$ pour tout $f \in F$.
   a) Montrer que u est linéaire.
   b) Calculer l'image par u de f_1, f_2, f_3 et f_4.
   c) En déduire que u est un endomorphisme de F, et déterminer la matrice représentative A de l'endomorphisme u dans la base $\mathscr{B}$.

6. Résoudre l'équation $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
   Quel résultat des questions précédentes retrouve-t-on ainsi ? Justifier.

7. Résoudre l'équation $(A^2 - 4A + 5I_4)X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
   Quel résultat des questions précédentes retrouve-t-on ainsi ? Justifier.

Problème ENS : facultatif

Soit $n \geqslant 1$ un entier et soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. On admet que $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$.

On définit

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Tr}_n : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{i,i} \end{array}$$

Ainsi, pour $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Tr}_2(B) = B_{1,1} + B_{2,2} = 1 - 6 = -5$.

1. Montrer que Tr_n est une application linéaire.
2. Déterminer, en justifiant votre réponse, le rang de Tr_n et la dimension de son noyau.
3. On se place dans cette question dans le cas où $n = 2$.
   a) Déterminer une base du noyau de Tr_2.
   b) Soit I_2 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $D_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de la forme xI_2 avec $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $D_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$
   c) Montrer que pour tout matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ il existe un unique couple $(A, B) \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr}_2) \times D_2(\mathbb{R})$ tel que $M = A + B$.
   d) Soit $C_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $C \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que, pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a $CB = BC$. Montrer que $C_2(\mathbb{R}) = D_2(\mathbb{R})$.

On revient maintenant au cas où $n \geqslant 1$ est un entier quelconque.

4. Montrer que, pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Tr}_n(AB) = \mathrm{Tr}_n(BA)$.
   Pour tous entiers $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on définit la matrice $E^{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par ses coefficients $E^{i,j}_{i,j} = 1$ et $E^{i,j}_{k,l} = 0$ si $k \neq i$ ou $l \neq j$.
5. Montrer que la famille $\left(E^{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Pour tous entiers $1 \leqslant i, j, k, \ell \leqslant n$ tels que $j \neq k$, montrer que $E^{i,j}E^{j,k} = E^{i,k}$ et $E^{i,j}E^{k,\ell} = 0$.
7. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que $f(AB) = f(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que $f\left(E^{i,j}\right) = 0$ si $i \neq j$ et que $f\left(E^{i,i}\right)$ ne dépend pas de i.
   b) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(A) = x\,\mathrm{Tr}_n(A)$ pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
8. Soit $g : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $g(A) = \mathrm{Tr}_n(AB)$ pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
9. A-t-on $\mathrm{Tr}_n(ABC) = \mathrm{Tr}_n(ACB)$ pour toutes matrices $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$? Justifiez votre réponse.